

Optimisation



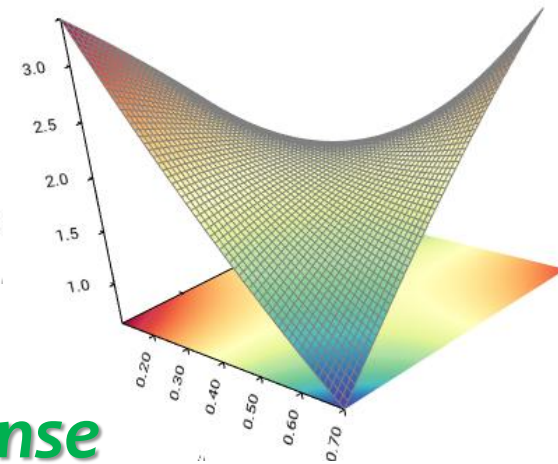
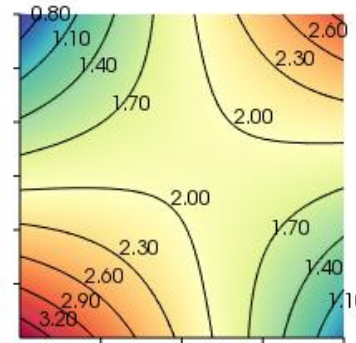
Optimisation
ponctuelle,
séquentielle



Méthode du simplexe



Optimisation spatiale



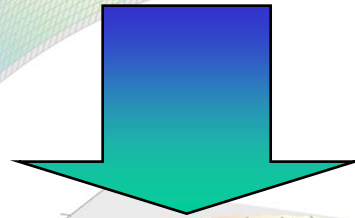
Surface de réponse

OBJECTIF

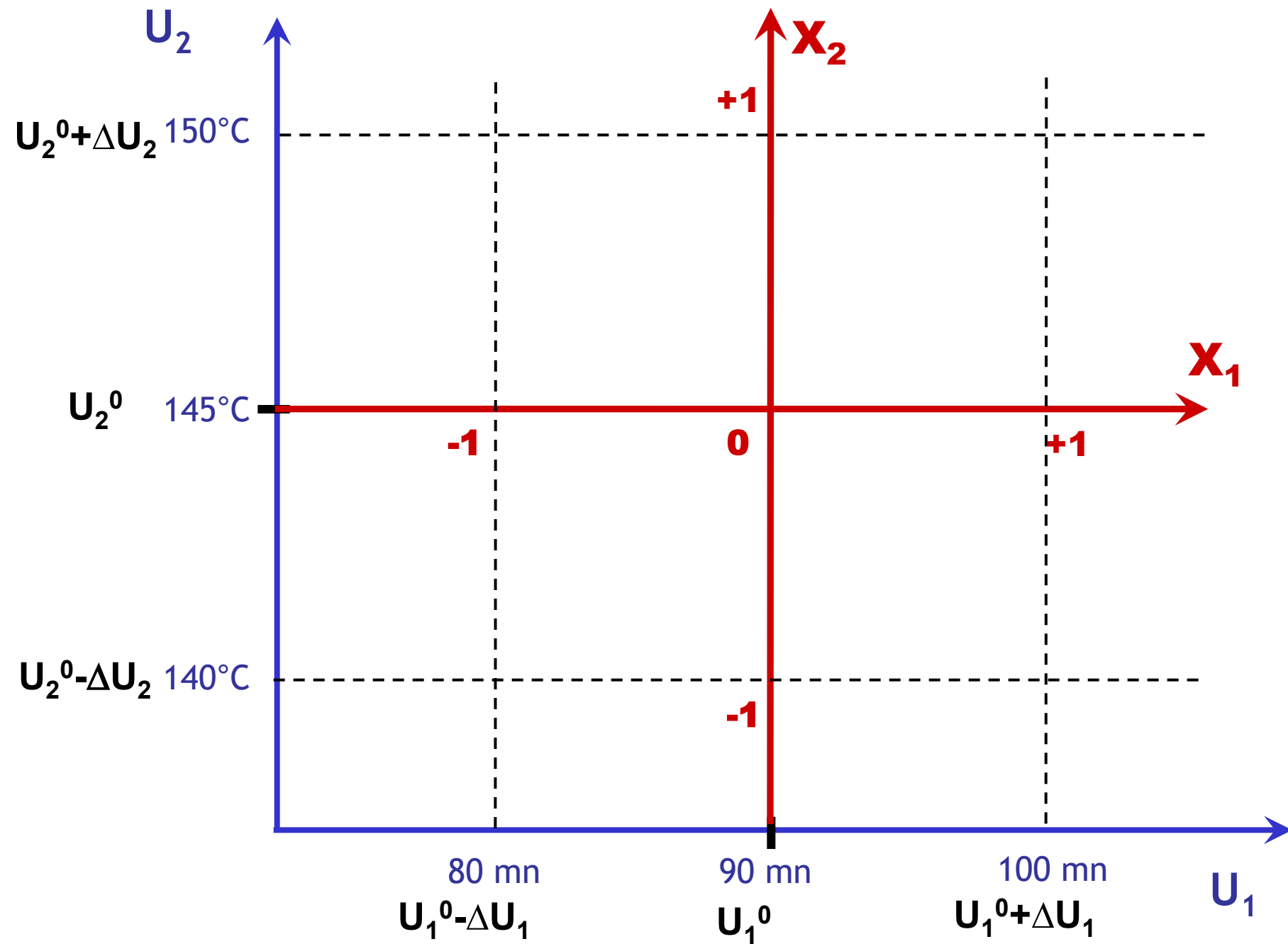
Etude quantitative des réponses

Optimisation

Rechercher le comportement (*optimisation*) d'une ou plusieurs propriétés (réponses expérimentales) dans un domaine expérimental fixé (domaine expérimental d'intérêt).



Connaître en n'importe quel point du domaine expérimental d'intérêt la valeur d'une ou plusieurs réponses expérimentales



VARIABLES CODEES VARIABLES REELLES

X_j

U_j

$$U_{ij} = U_j^0 + X_{ij} \cdot \Delta U_j$$

X_{ij} : valeur de la variable **codée** j à l'expérience i

U_{ij} : valeur de la variable **réelle** j à l'expérience i

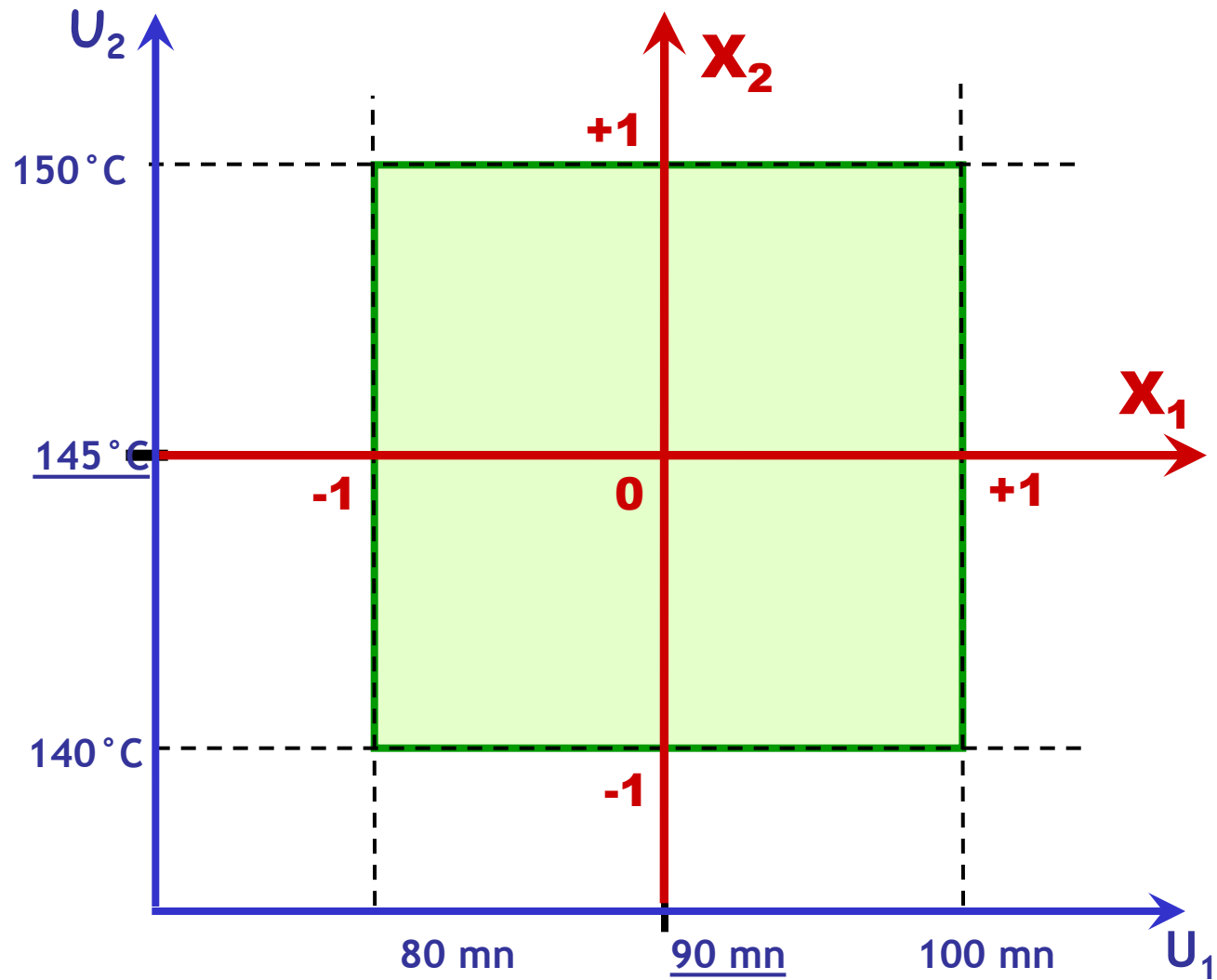
U_j^0 : valeur de la variable réelle j au **centre** du domaine

ΔU_j : variation de la variable réelle j correspondant à une variation de la variable codée correspondante égale à 1 ($\Delta x_j = 1$).

U_j^0 : **centre**

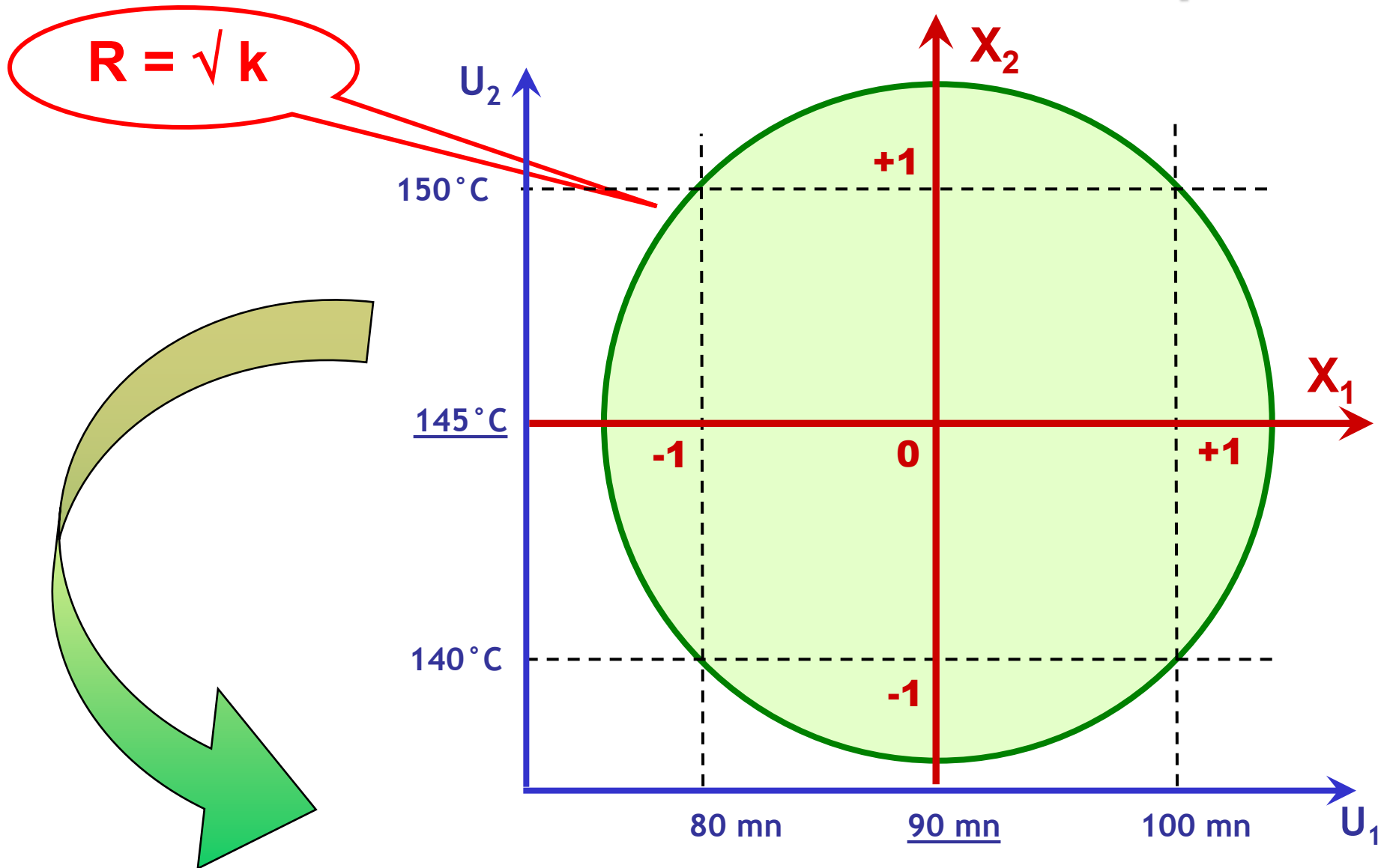
ΔU_j : ***pas de variation***

DOMAINE EXPERIMENTAL CUBIQUE



Le domaine expérimental d'intérêt est défini par le domaine de variation des facteurs étudiés.

DOMAINE EXPERIMENTAL SPHERIQUE



Le domaine expérimental d'intérêt est le domaine situé autour du centre du domaine ou centre d'intérêt.



Quel est l'objectif ?

Pouvoir estimer la valeur de la réponse expérimentale **en tout**
point du domaine experimental d'intérêt



Pour délimiter, **s'il existe**, le **domaine** où toutes les réponses
expérimentales respectent les contraintes imposées par **le cahier**
des charges



Zone de compromis acceptable

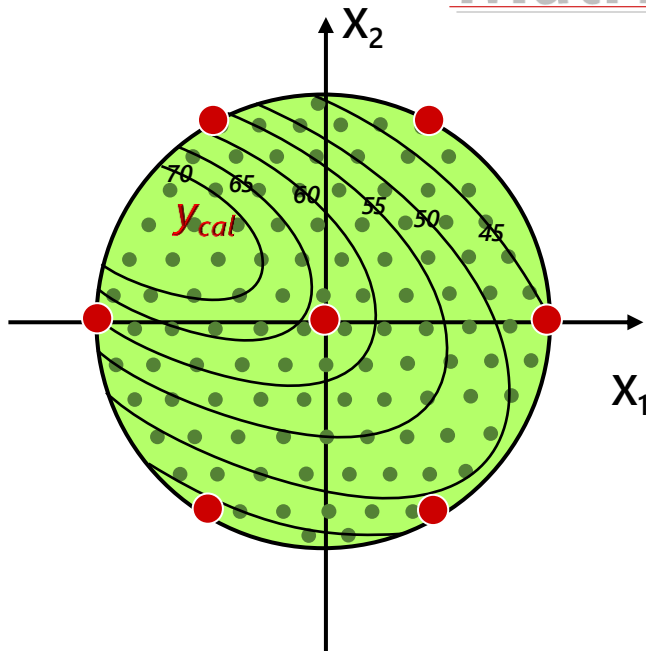
On doit faire des expériences



Celles, qui apportent l'information désirée !

"Connaître, en tout point du domaine expérimental, la valeur de la réponse(s) expérimentale(s)"

Matrice d'expériences



Modèle mathématique

$$Y = f(X_i)$$

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{11} X_1^2 + \dots$$

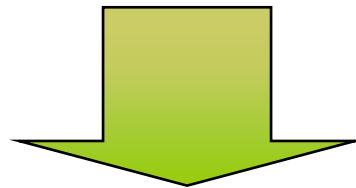
OBJECTIF

Connaître en n'importe quel point du domaine expérimental d'intérêt la valeur d'une ou plusieurs réponses expérimentales

Proposer un modèle :

Quelles doivent être les qualités du modèle ?

Le modèle doit bien représenter le phénomène étudié dans le domaine expérimental d'intérêt



Si cela est vérifié, il doit permettre de prévoir, en n'importe quel point de ce domaine expérimental d'intérêt, la valeur de la réponse expérimentale étudiée avec une bonne qualité prévisionnelle

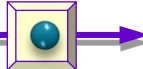
OBJECTIF

Connaître en n'importe quel point du domaine expérimental d'intérêt la valeur d'une ou plusieurs réponses expérimentales

Pour un modèle proposé

- ➡ Construire la matrice d'expériences
- ➡ Construire le plan d'expérimentation
Vérifier si la stratégie respecte les objectifs et les contraintes
- ➡ Randomisation
- ➡ Faire les expériences
- ➡ Calculer les estimations des coefficients
- ➡ Valider le modèle

Interprétation



Exemple : préparation de microsphères



Variables d'entrée

Facteurs

- Vitesse d'agitation :
300 → 900 rpm
- Volume phase aqueuse :
150 → 300 ml

Variables de sortie

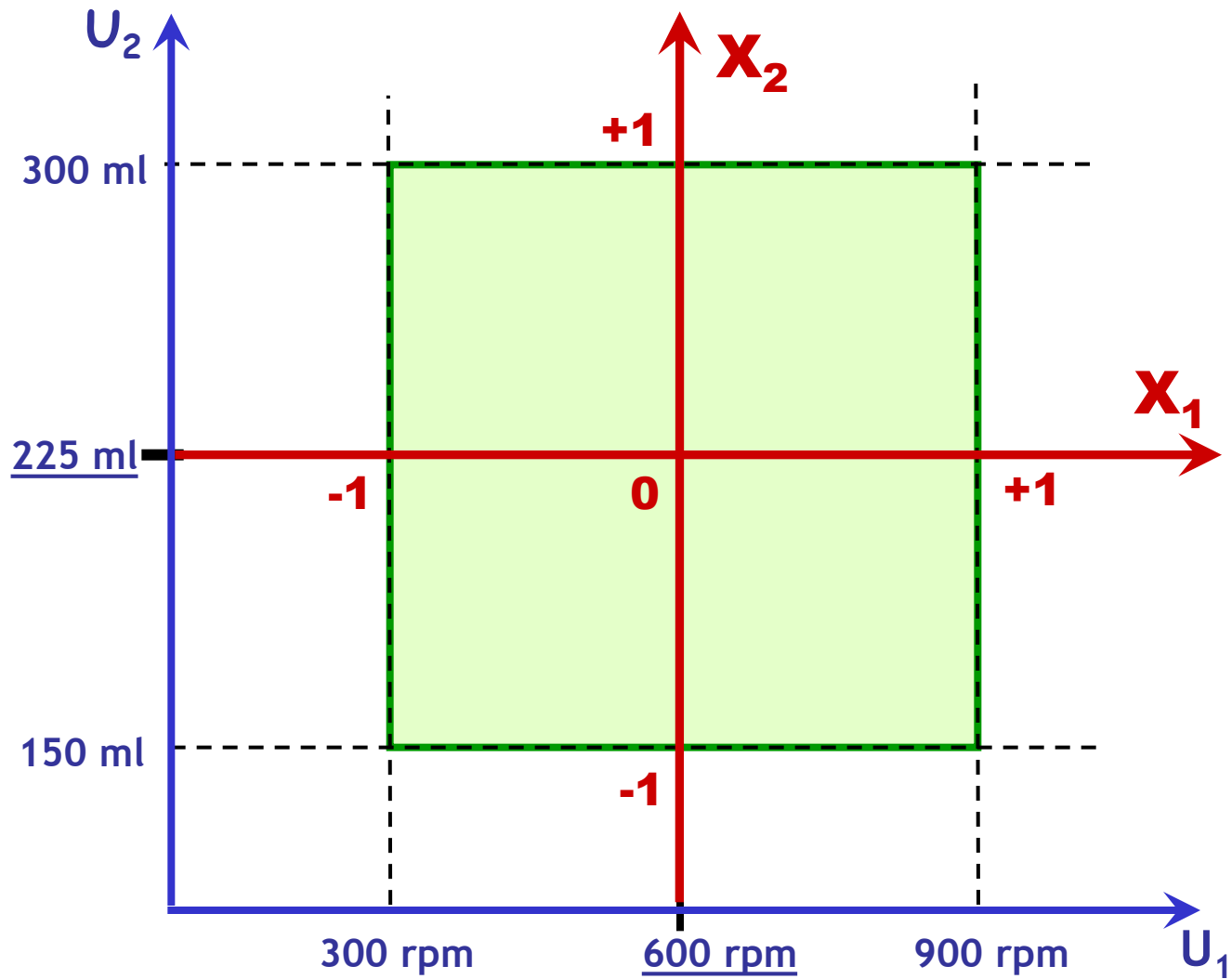
Réponses

- Efficacité de piégeage
- Granulométrie



Déterminer les conditions optimales pour avoir le meilleur compromis entre les différentes réponses

DOMAINE EXPERIMENTAL CUBIQUE



Le domaine expérimental d'intérêt est défini par le domaine de variation des facteurs étudiés.

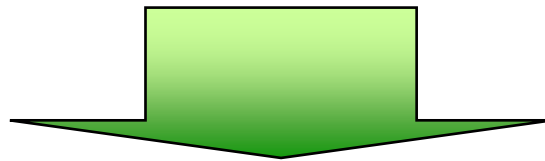
OBJECTIF

Connaître en n'importe quel point du domaine expérimental d'intérêt la valeur d'une ou plusieurs réponses expérimentales

Proposer un modèle :

Modèle polynomial du 2^{ème} degré :

$$\eta = \beta_0 + \sum_i \beta_i x_i + \sum_{ii} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j$$



$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2$$

MATRICES D'EXPERIENCES :

- modèle polynomial de 2^{ème} degré :

Domaine expérimental cubique :

→ composite

→ de Box- Benhken

MATRICES COMPOSITES

N°	X_1	X_2	X_3	...	X_k	
1	-	-	-	...	-	
2	+	-	-	...	-	Matrice factorielle 2^k N_F points
3	-	+	-	...	-	
4	+	+	-	...	-	
5	-	-	+	...	-	
...	...	...	...	...	...	
	$-\alpha$	0	0	...	0	
	$+\alpha$	0	0	...	0	Matrice axiale $N_a \text{ points} = 2k$ Domaine cubique : $\alpha = 1$ Domaine sphérique : $\alpha = N_F^{1/4}$
	0	$-\alpha$	0	0	0	
	0	$+\alpha$	0	0	0	
	...	...	...	...	...	
	0	0	0	...	$-\alpha$	
	0	0	0	...	$+\alpha$	
	0	0	0	...	0	
	0	0	0	...	0	$N_0 \text{ points au centre}$
	0	0	0	...	0	

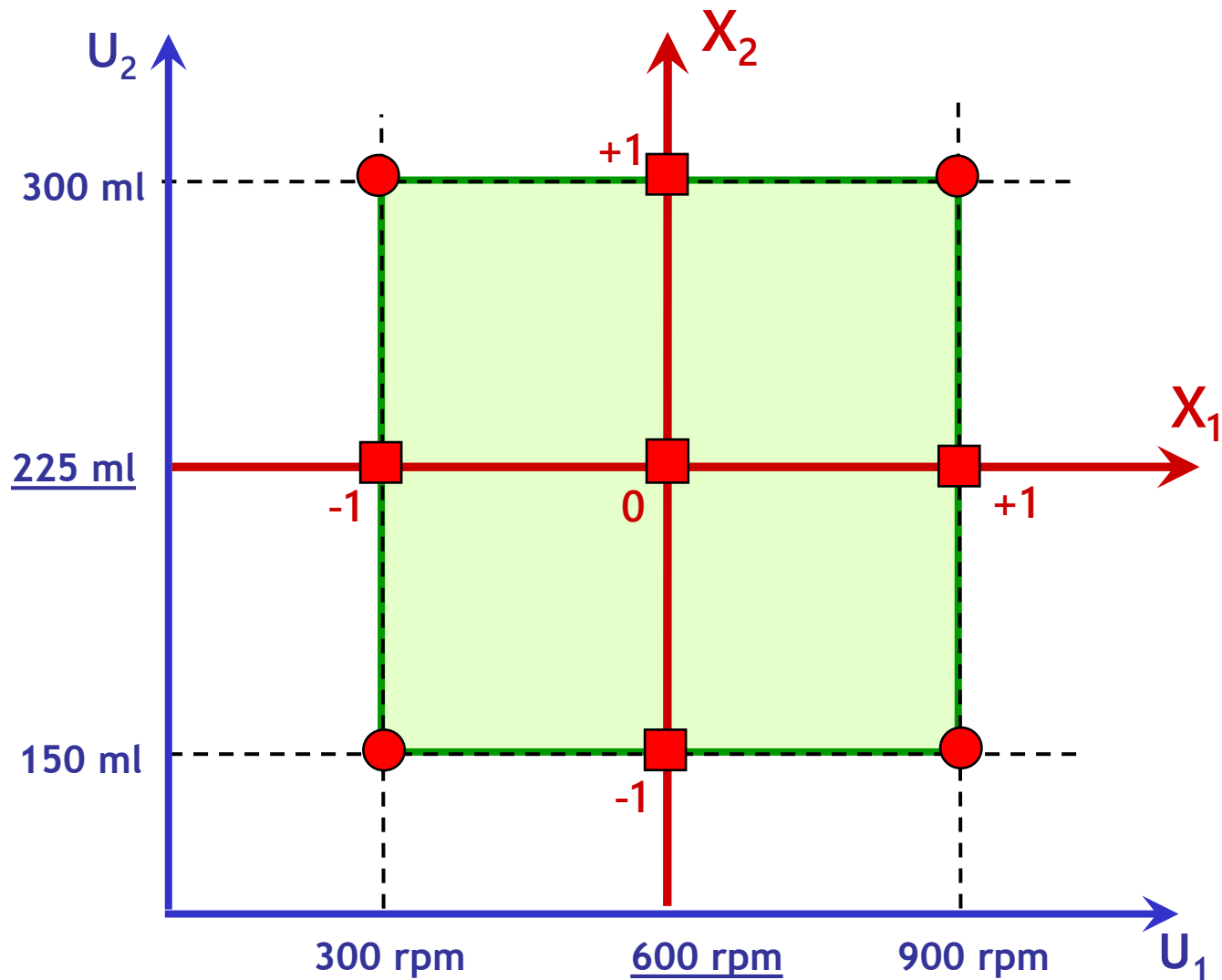
$$N = N_F + N_a + N_o$$

Matrice d'expériences "composite"

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2$$

N°	X ₁	X ₂
1	-1,000	-1,000
2	1,000	-1,000
3	-1,000	1,000
4	1,000	1,000
5	-1,000	0,000
6	1,000	0,000
7	0,000	-1,000
8	0,000	1,000
9	0,000	0,000
10	0,000	0,000
11	0,000	0,000

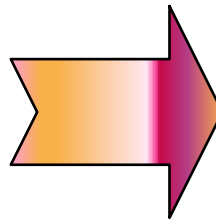
Matrice d'expériences "composite"



Matrice d'expériences "composite"

Matrice d'expériences

N°	X ₁	X ₂
1	-1,000	-1,000
2	1,000	-1,000
3	-1,000	1,000
4	1,000	1,000
5	-1,000	0,000
6	1,000	0,000
7	0,000	-1,000
8	0,000	1,000
9	0,000	0,000
10	0,000	0,000
11	0,000	0,000

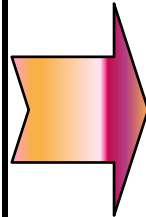


Plan d'expérimentation

N°	Vitesse <i>rpm</i>	Volume <i>ml</i>
1	300	150
2	900	150
3	300	300
4	900	300
5	300	225
6	900	225
7	600	150
8	600	300
9	600	225
10	600	225
11	600	225

Matrice d'expériences

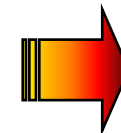
N°	X ₁	X ₂
1	-1,000	-1,000
2	1,000	-1,000
3	-1,000	1,000
4	1,000	1,000
5	-1,000	0,000
6	1,000	0,000
7	0,000	-1,000
8	0,000	1,000
9	0,000	0,000
10	0,000	0,000
11	0,000	0,000



Plan d'expérimentation

N°	Vitesse <i>rpm</i>	Volume <i>ml</i>	Effic.
1	300	150	28.0
2	900	150	72.0
3	300	300	82.0
4	900	300	46.0
5	300	225	71.0
6	900	225	68.0
7	600	150	51.0
8	600	300	52.0
9	600	225	71.0
10	600	225	62.0
11	600	225	66.0

$$s^2 = [(71-66.3)^2 + (62-66.3)^2 + (66-66.3)^2] / (3-1) = 20.33$$



$$s = 4.51$$

REPONSE : Efficacité piégeage

Estimation des coefficients :

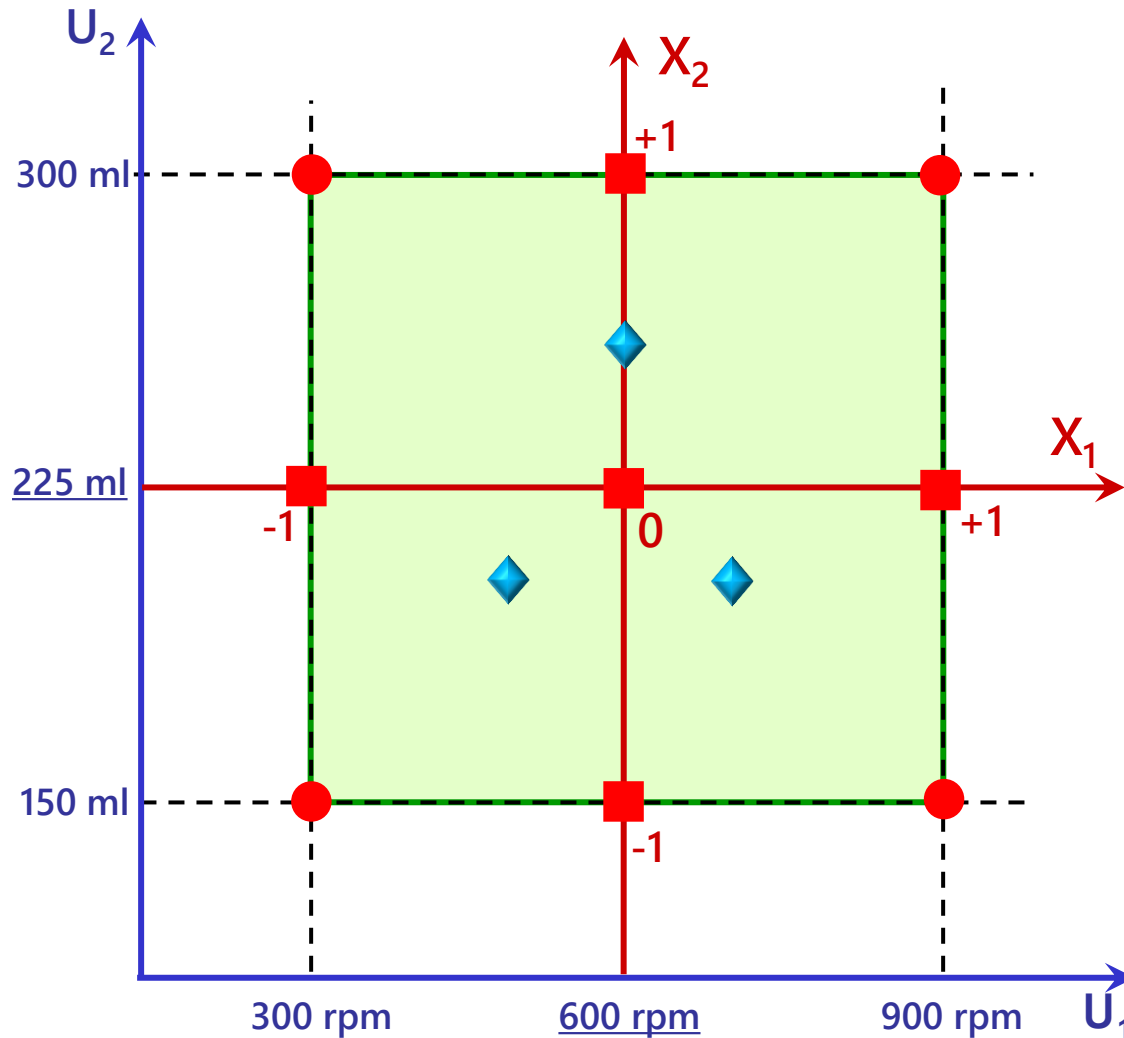
$$\begin{aligned} Y_1 = & 65.84 + 0.83 X_1 + 4.83 X_2 \\ & + 4.39 X_1^2 - 13.61 X_2^2 \\ & - 20.0 X_1 X_2 \end{aligned}$$

VALIDATION DU MODELE POSTULE

Il est nécessaire de tester la validité du modèle postulé :

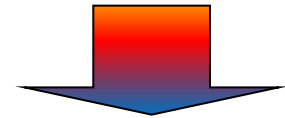
- ➡ Soit en réalisant des expériences supplémentaires en des points particuliers que nous appelons points tests
- ➡ Soit à partir d'outils statistiques comme l'Analyse de variance

Points tests



Matrice d'expériences

N	X_1	X_2
12	- 0.433	- 0.25
13	0.433	- 0.25
14	0.000	0.50



Plan d'expérimentation

N	U_1	U_2
12	470	206.3
13	730	206.3
14	600	262.5

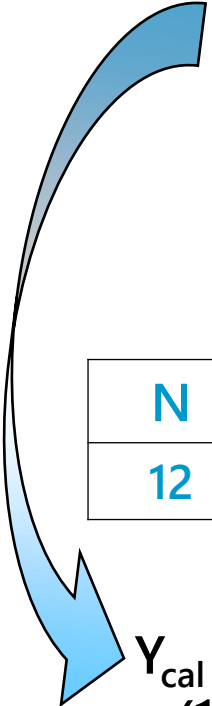
Validation du modèle aux points tests :

REPONSE Efficacité (Y_1)

N°Exp	$Y_{exp.}$
12	64.0
13	65.0
14	62.0

N	X_1	X_2
12	- 0.433	- 0.250

$$Y_1 = 65.84 - 0.83 X_1 + 4.83 X_2 + 4.39 X_1^2 - 13.61 X_2^2 - 20.0 X_1 X_2$$


$$Y_{cal} = 65.84 - (0.83 \times -0.433) + (4.83 \times -0.250) + (4.39 \times -0.433^2) - (13.61 \times -0.250^2) - (20.0 \times -0.433 \times -0.250)$$
$$= 62.08$$

Validation du modèle aux points tests :

REPONSE Efficacité (Y_1)

Exper	Yexp.	Ycalc.	Diff.	Normée	Ecart-Type	p value %
12	64.00	62.08	1.92	0.36	5.39	73.62
13	65.00	67.13	-2.13	-0.40	5.39	70.83
14	62.00	64.86	-2.86	-0.53	5.40	61.96

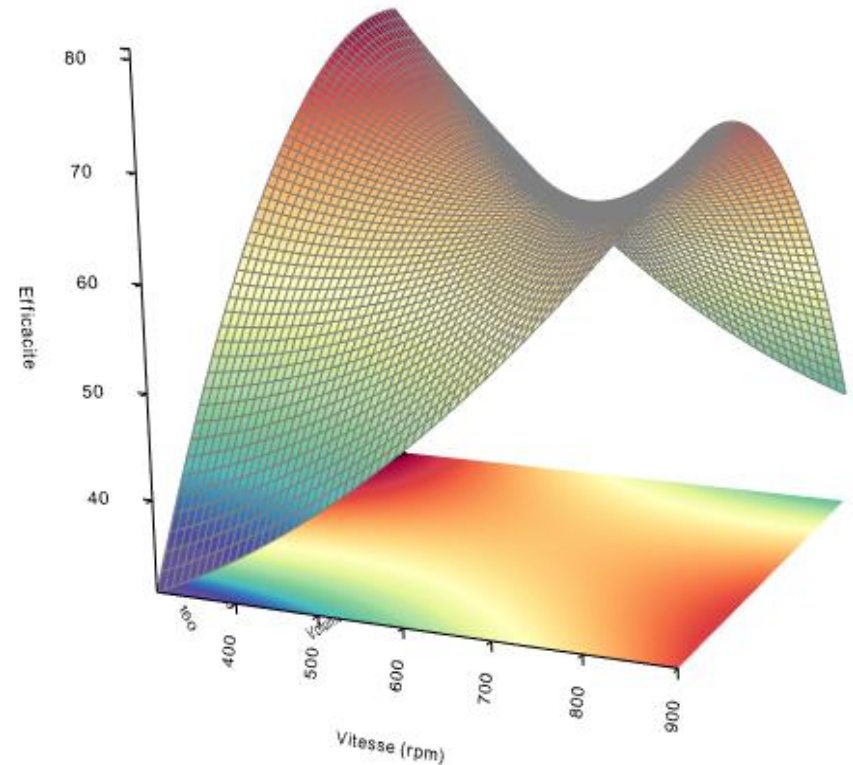
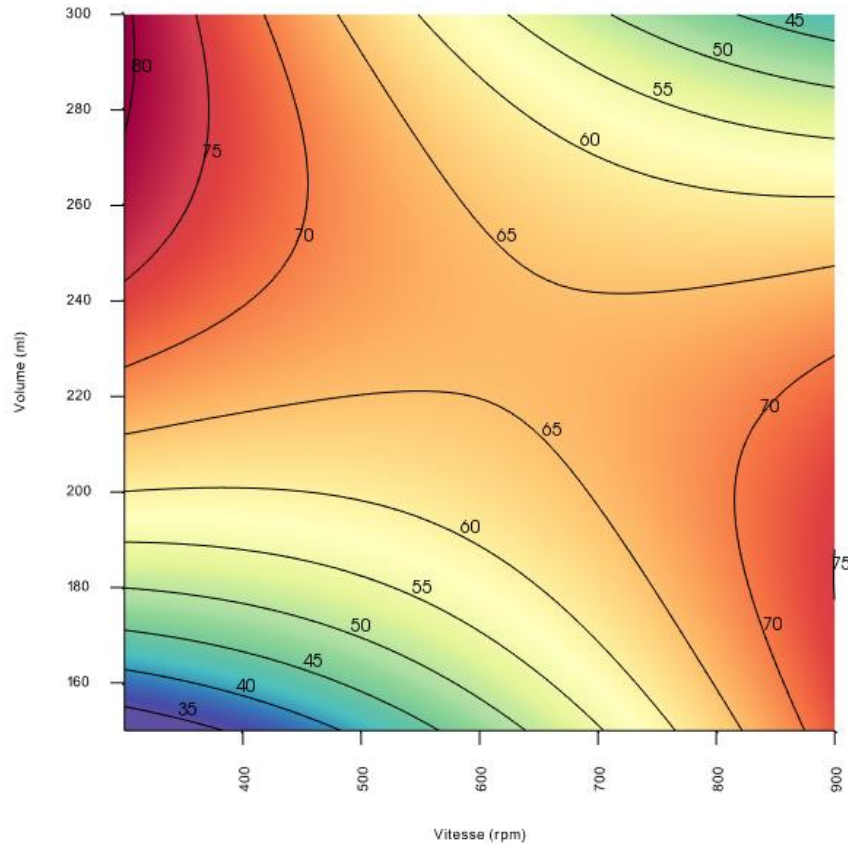
REPONSE : Efficacité piégeage

Estimation des coefficients :

(13 expériences)

$$\begin{aligned} Y_1 = & 65.41 + 0.56 X_1 + 4.62 X_2 \\ & + 4.79 X_1^2 - 13.53 X_2^2 \\ & - 19.9 X_1 X_2 \end{aligned}$$

Nous connaissons en n'importe quel point du domaine expérimental d'intérêt la valeur de chacune des réponses expérimentales



Variation de la réponse – Efficacité dans le plan :
Vitesse, Volume

Plan d'expérimentation

N°	Vitesse <i>rpm</i>	Volume <i>ml</i>	Effic.	Granulo.
1	300	150	28.0	0.3836
2	900	150	72.0	0.2840
3	300	300	82.0	0.5404
4	900	300	46.0	0.2296
5	300	225	71.0	0.5040
6	900	225	68.0	0.3200
7	600	150	51.0	0.2800
8	600	300	52.0	0.2961
9	600	225	72.0	0.3346
12	600	225	62.0	0.3199
13	600	225	66.0	0.3430

REPONSE : Granulométrie

Estimation des coefficients :

$$\begin{aligned} Y_2 = & 0.3342 - 0.0991 X_1 + 0.0197 X_2 \\ & + 0.0752 X_1^2 - 0.0487 X_2^2 \\ & - 0.0528 X_1 X_2 \end{aligned}$$

Validation du modèle aux points tests :

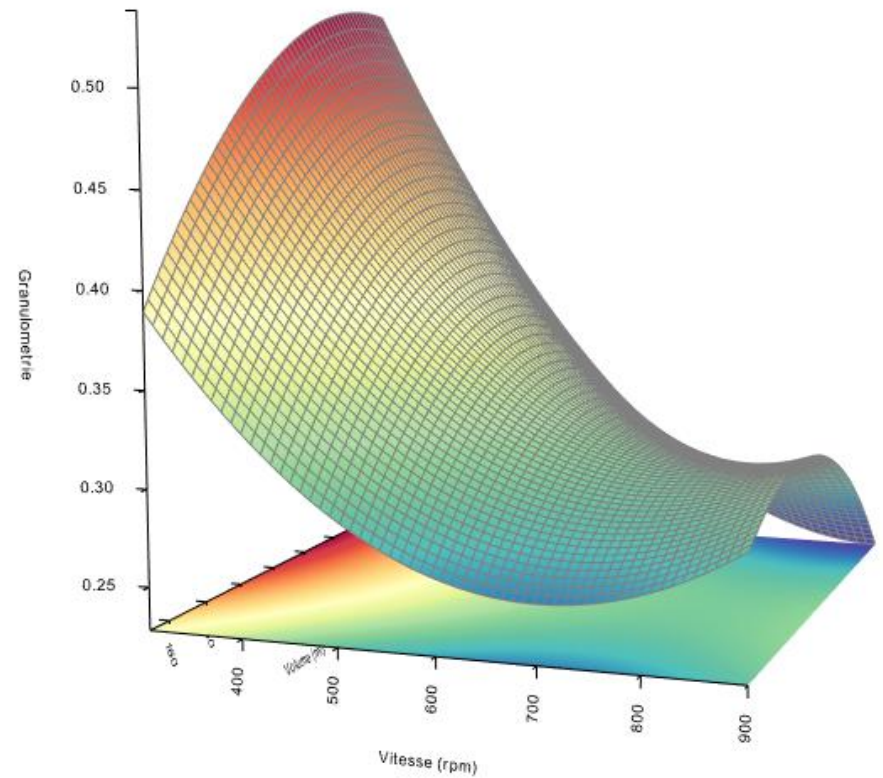
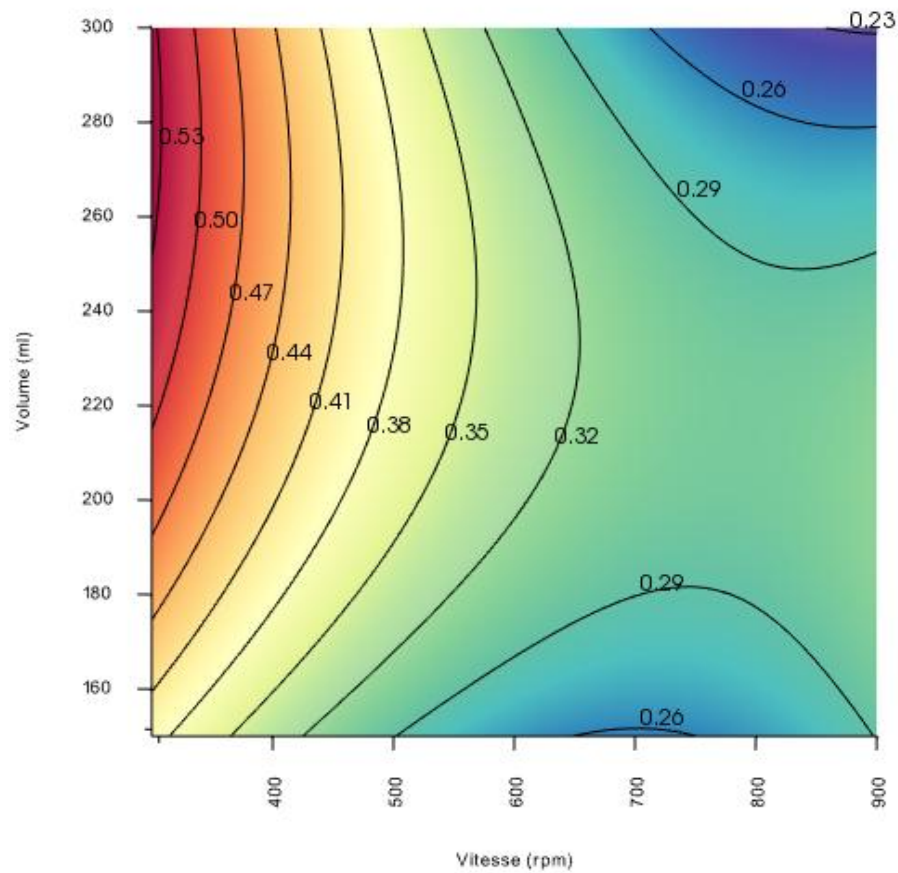
REPONSE Granulométrie (Y_2)

Exper	Yexp.	Ycalc.	Diff.	Normée	Ecart-Type	p value %
12	0.3931	0.37752	0.01558	1.05669	0.01475	33.90
13	0.2861	0.30315	-0.01705	-1.15623	0.01475	29.98
14	0.3407	0.33191	0.00879	0.59417	0.01480	57.83

REPONSE : Granulométrie

Estimation des coefficients :
(13 expériences)

$$\begin{aligned} Y_2 = & 0.3352 - 0.1013 X_1 + 0.0205 X_2 \\ & + 0.0741 X_1^2 - 0.0487 X_2^2 \\ & - 0.0520 X_1 X_2 \end{aligned}$$



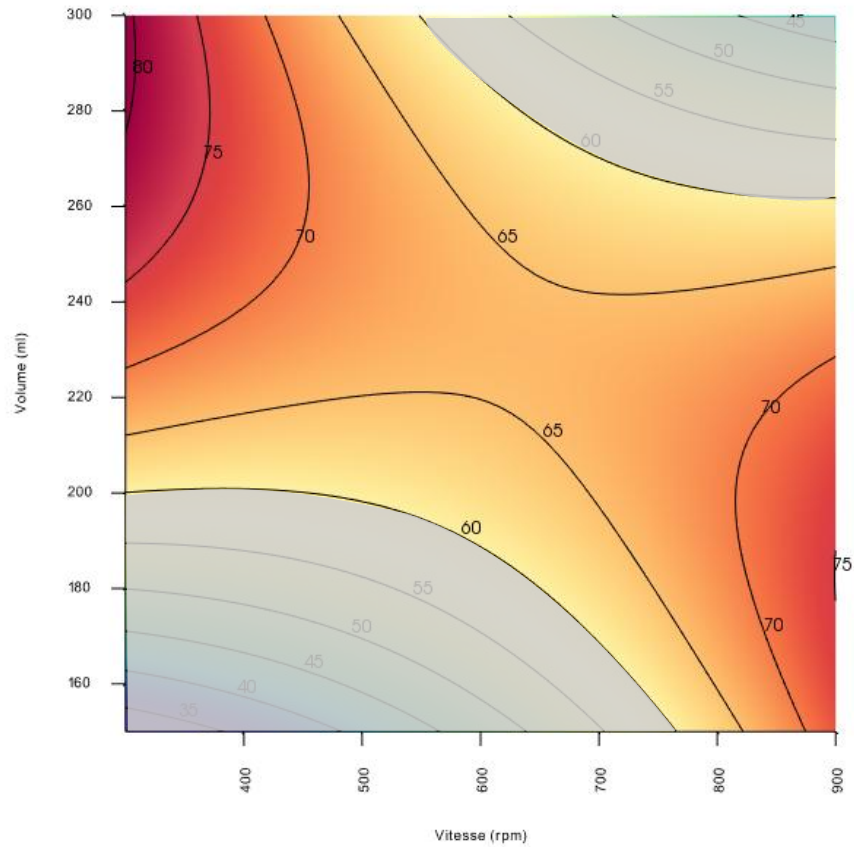
Variation de la réponse – Granulométrie dans le plan : Vitesse, Volume

OBJECTIFS :

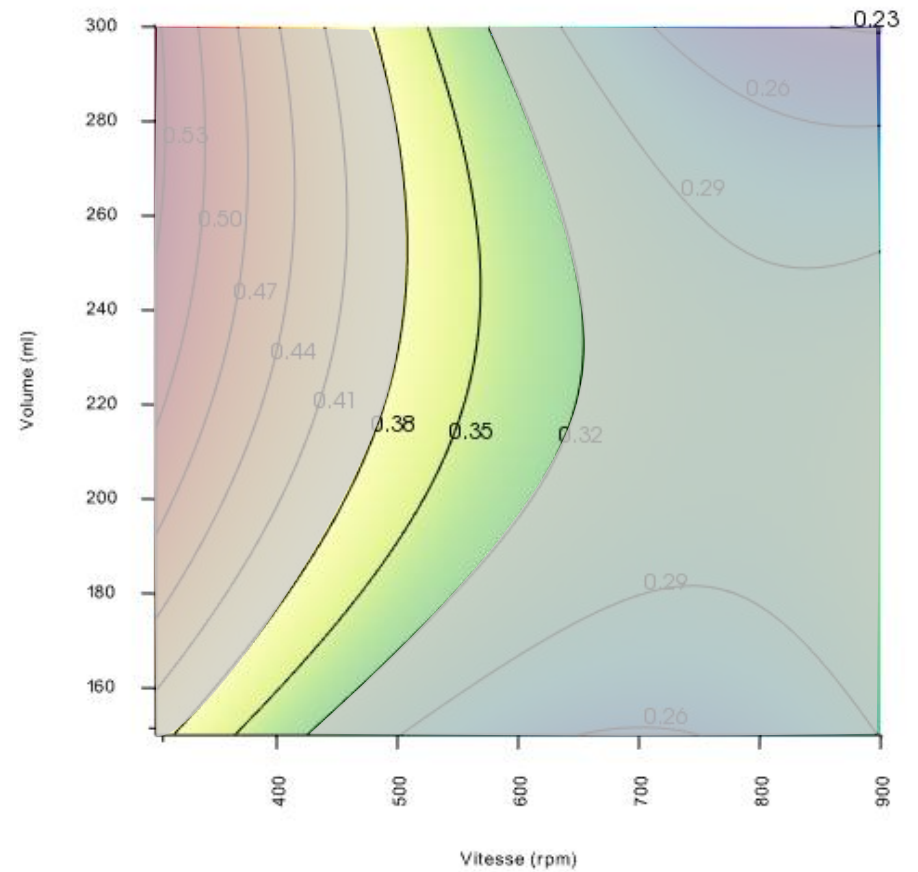
Réponses expérimentales

η_1 : Efficacité > 60 %

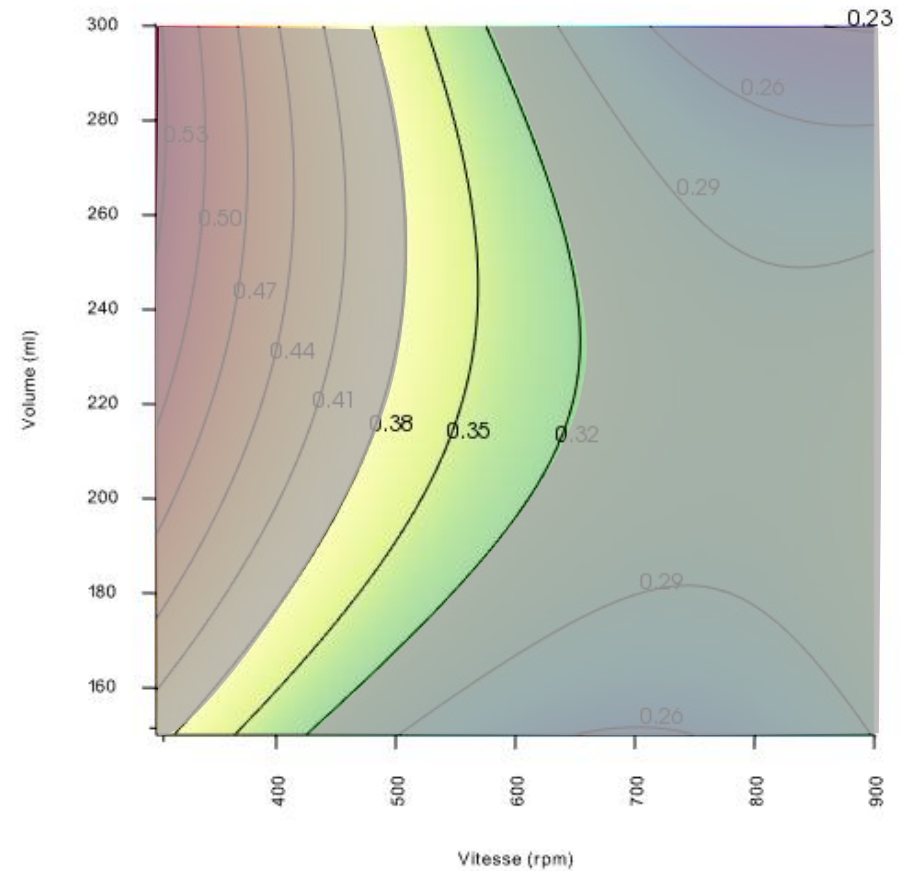
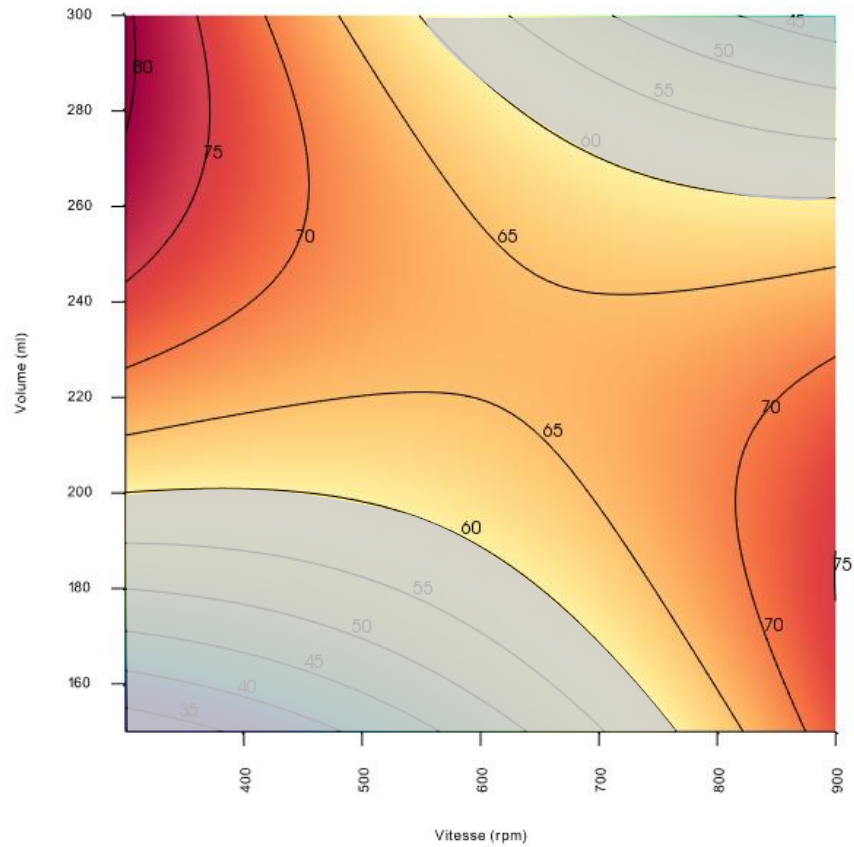
η_2 : 0.32 < Granulométrie < 0.38



Efficacité > 60 %

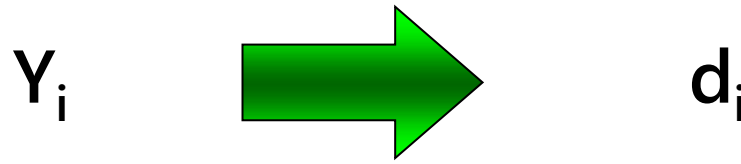


0.32 < Granulométrie < 0.38



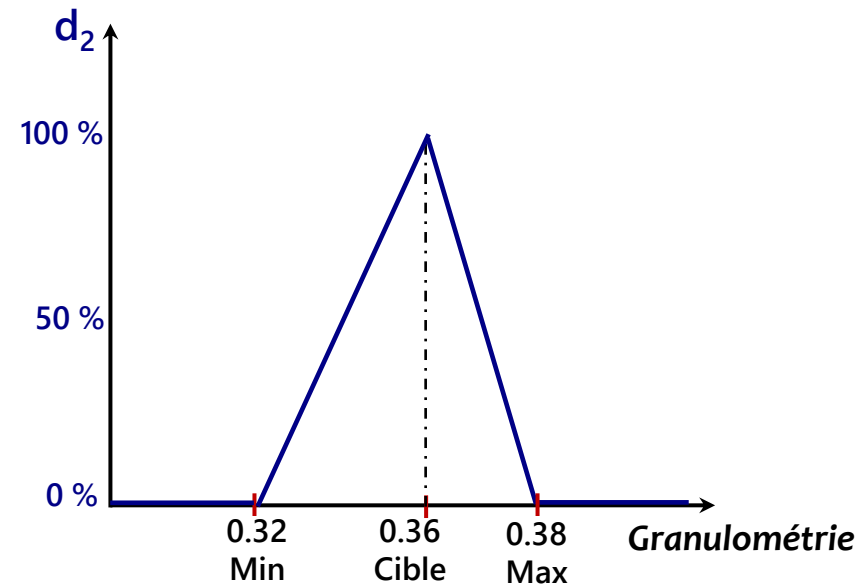
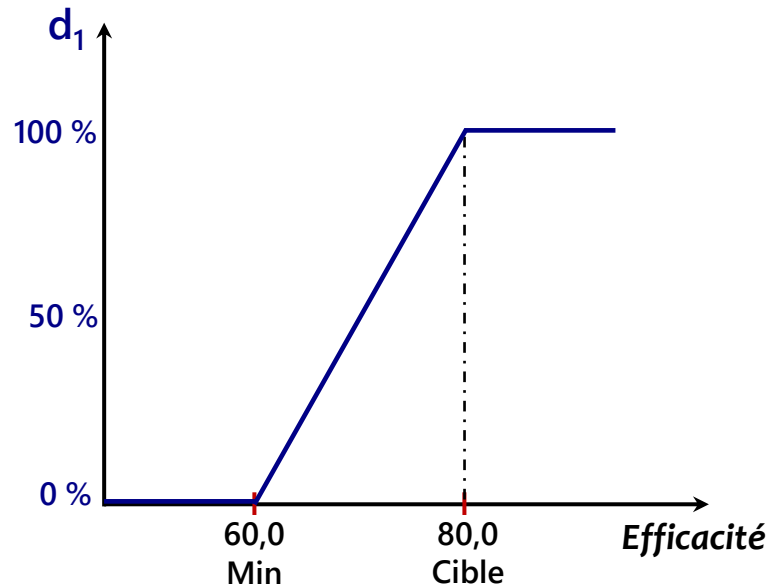
Efficacité > 60 % **et** **0.32 < Granulométrie < 0.38**

Fonction de désirabilité élémentaire unilatérale



Y_1 : Efficacité
(> 60 %)

Y_2 : Granulométrie
(0.32 < Y_2 < 0.38)



$$d_1 \quad D = (\quad \times \quad)^{1/2} \quad d_2$$

Fonction de désirabilité globale

Désirabilité

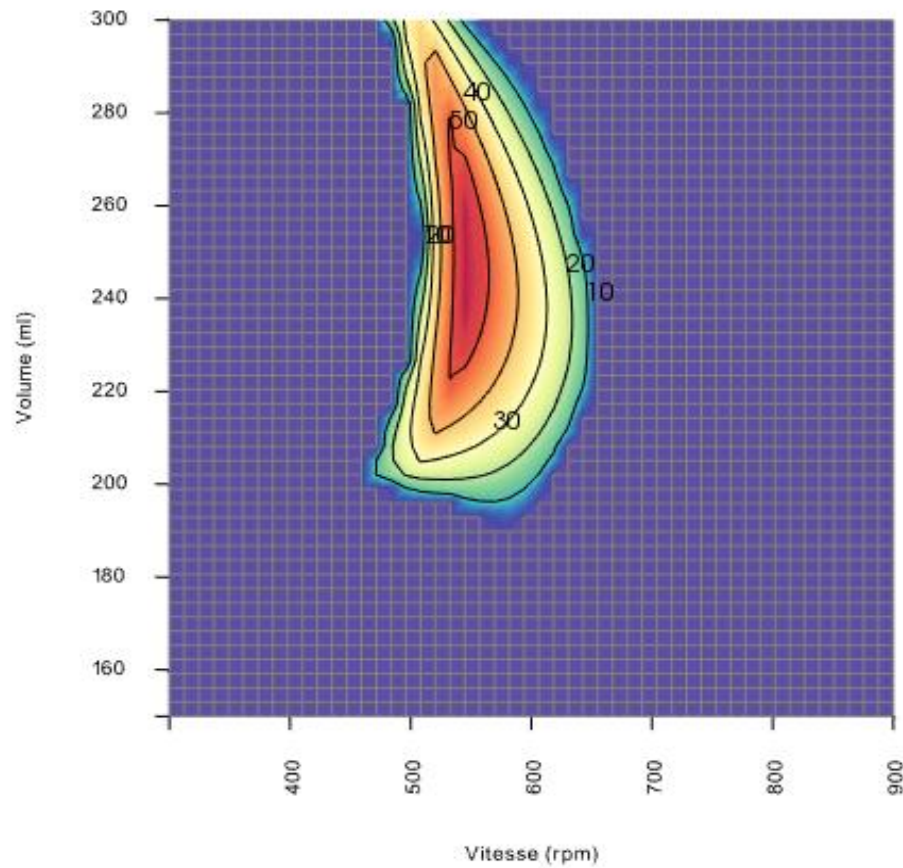
Coordonnées du maximum

Variable	Valeur	Facteur	Valeur
X1	-0.17697	Vitesse (rpm)	546.91
X2	0.29021	Volume eau (ml)	246.77

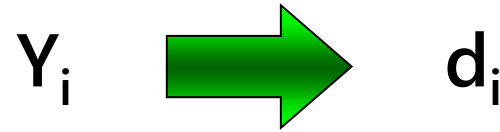
Caractéristiques du maximum

	Réponse	Valeur	di %
Y1	Efficacité	66.68	33.41
Y2	Granulométrie	0.3600	100
	DESIRABILITE		57.798

Représentation graphique de la désirabilité

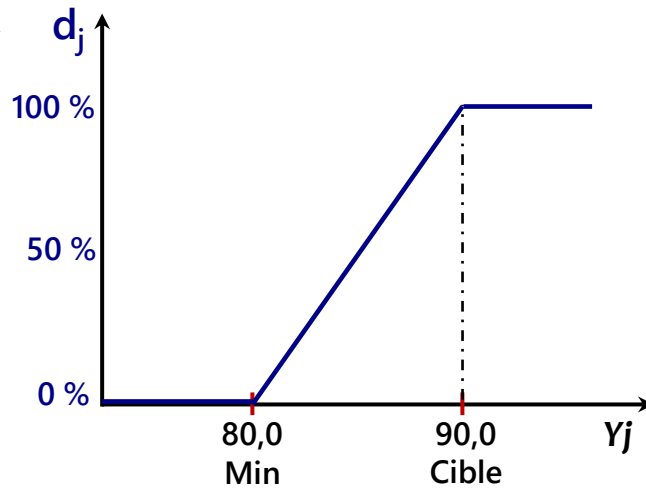


Fonction de désirabilité partielle :

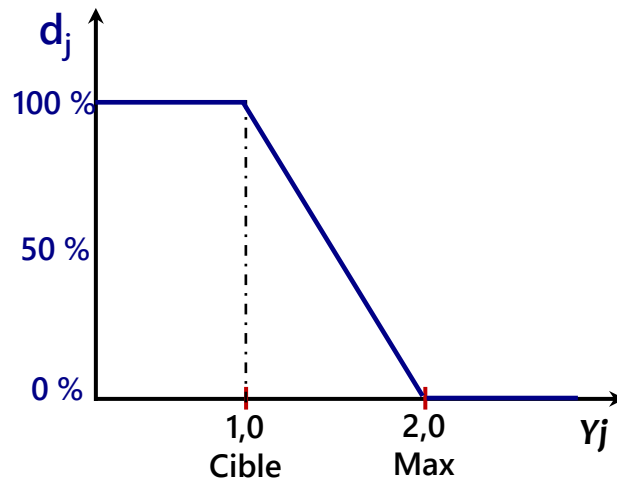


Fonction unilatérale :

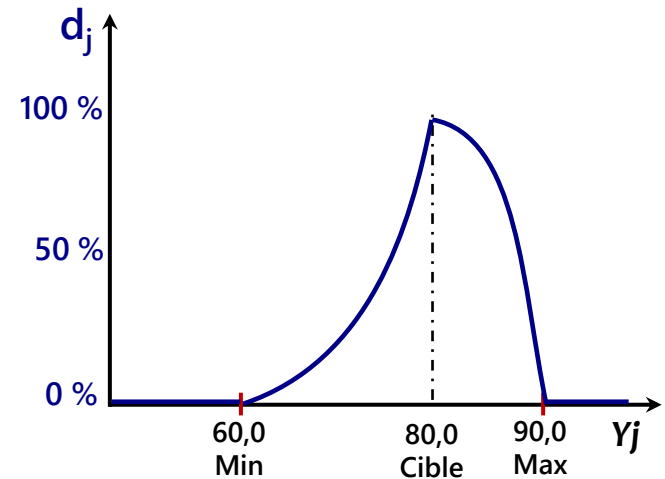
Maximisation :



Minimisation :



Fonction bilatérale :



Fonction de désirabilité globale :

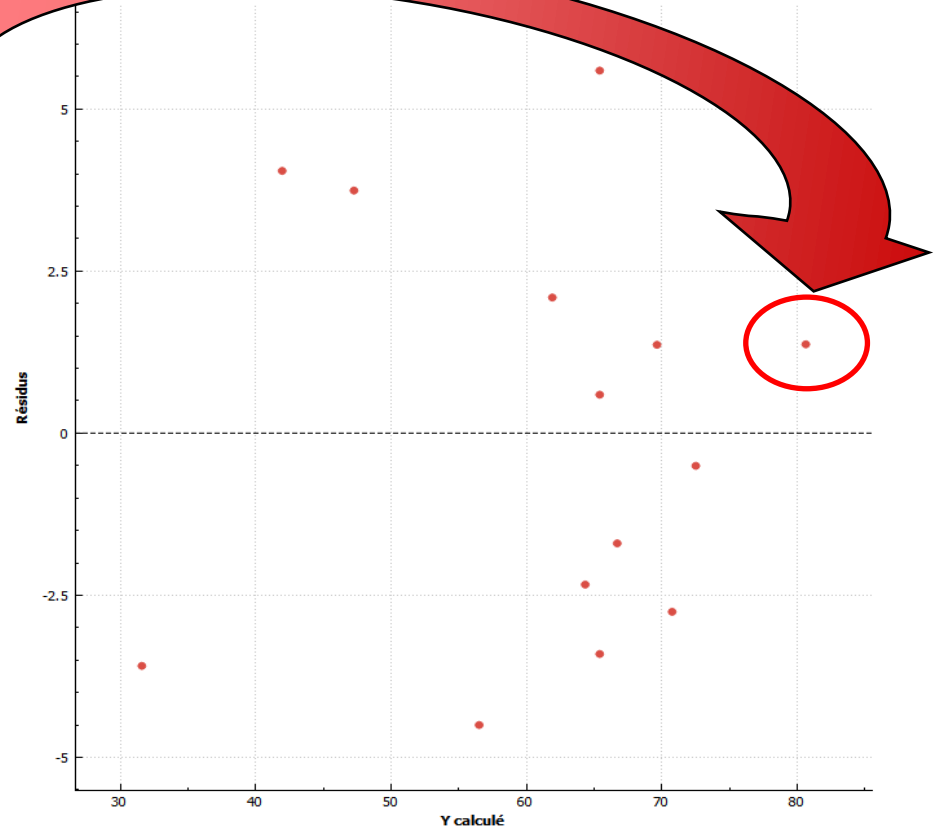
$$D = \left(d_1^{w_1} \times d_2^{w_2} \times d_3^{w_3} \times \dots \right)^{1/\sum w_i}$$

d_i : fonction de désirabilité partielle

w_i : pondération attribuée à la réponse i

Tableau des résidus de la réponse : Efficacité

	Yexp.	Ycalc.	Différence
1	28.000	31.591	-3.591
2	72.000	72.505	-0.505
3	82.000	80.630	1.370
4	46.000	41.955	4.045
5	71.000	69.637	1.363
6	68.000	70.756	-2.756
7	51.000	47.258	3.742
8	52.000	56.503	-4.503
9	71.000	65.407	5.593
10	62.000	65.407	-3.407
11	66.000	65.407	0.593
12	64.000	61.908	2.092
13	65.000	66.700	-1.700
14	62.000	64.337	-2.337



Etude des résidus de la réponse : Efficacité

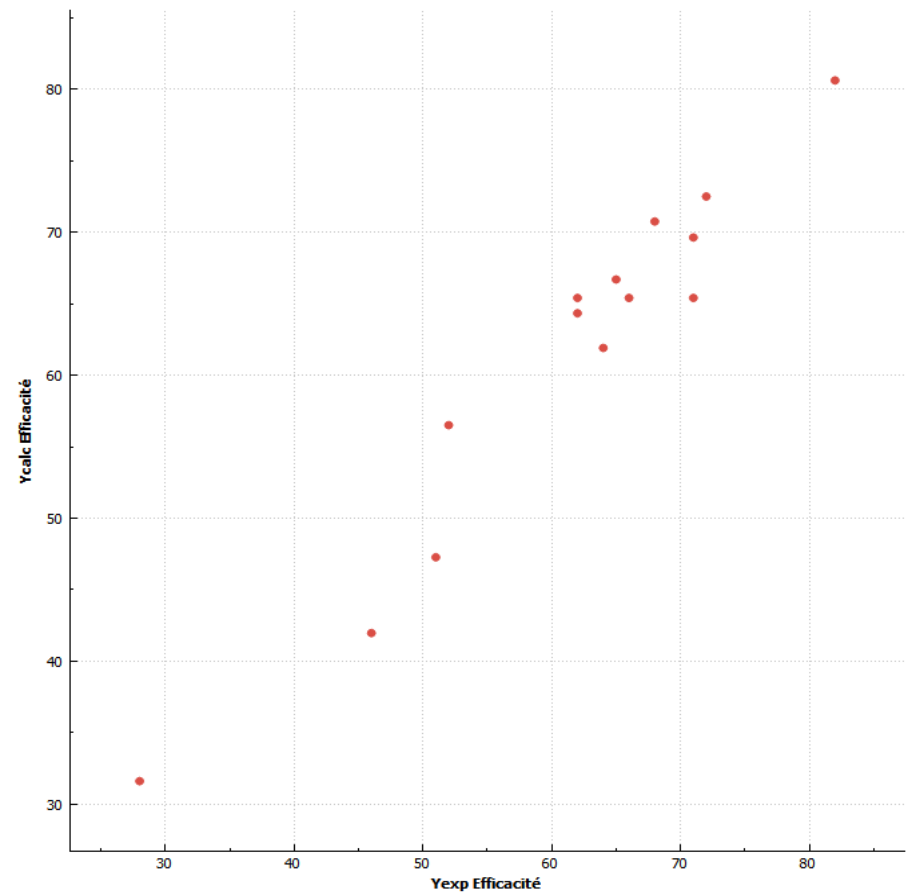
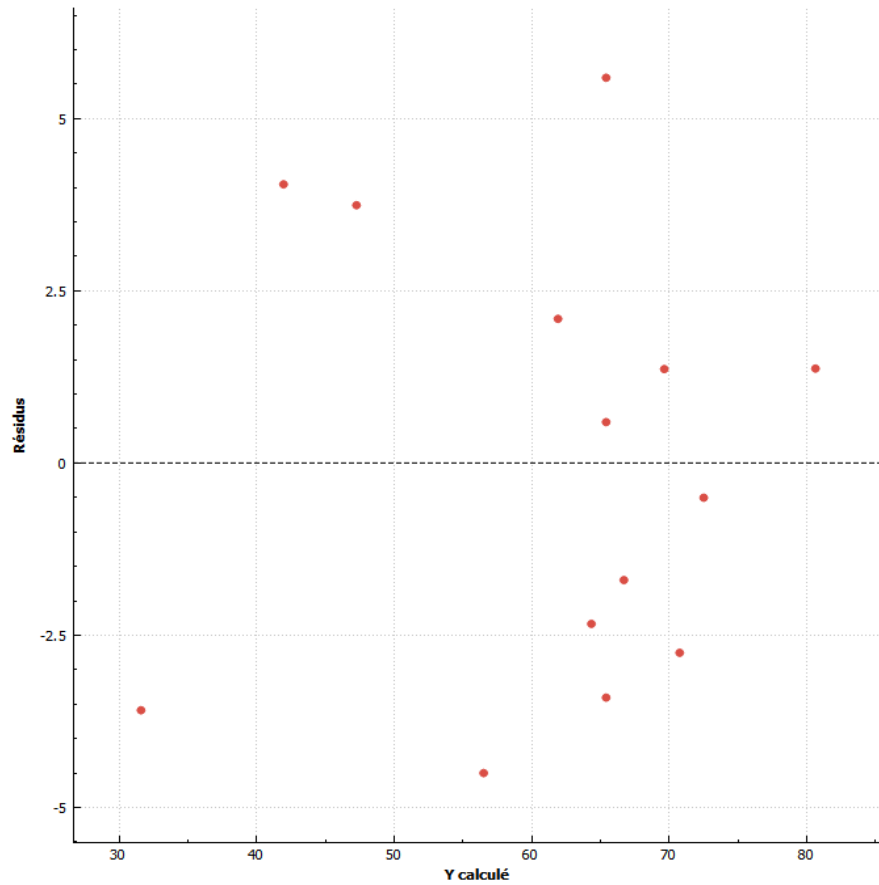


Tableau des résidus : réponse : Granulométrie

<i>N°Exp</i>	Yexp.	Ycalc.	Différence
<i>1</i>	0.38360	0.389412	-0.005812
<i>2</i>	0.2840	0.290816	-0.006816
<i>3</i>	0.54040	0.534321	0.006079
<i>4</i>	0.22960	0.227832	0.001768
<i>5</i>	0.50400	0.510622	-0.006622
<i>6</i>	0.32000	0.308079	0.011920
<i>7</i>	0.28000	0.266016	0.013984
<i>8</i>	0.29610	0.306979	-0.010879
<i>9</i>	0.33460	0.335253	-0.000653
<i>10</i>	0.31990	0.335253	-0.015353
<i>11</i>	0.34300	0.335253	0.007747
<i>12</i>	0.39310	0.379204	0.013896
<i>13</i>	0.28610	0.302753	-0.016653
<i>14</i>	0.34070	0.333305	0.007395

Etude des résidus de la réponse : Granulométrie

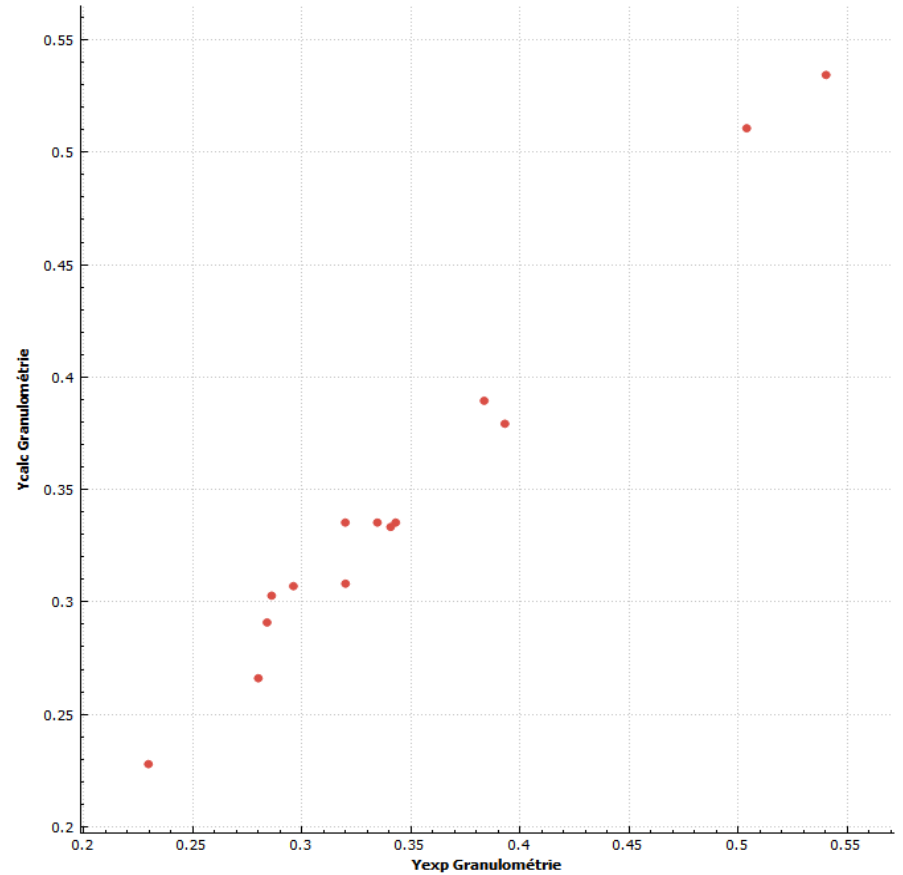
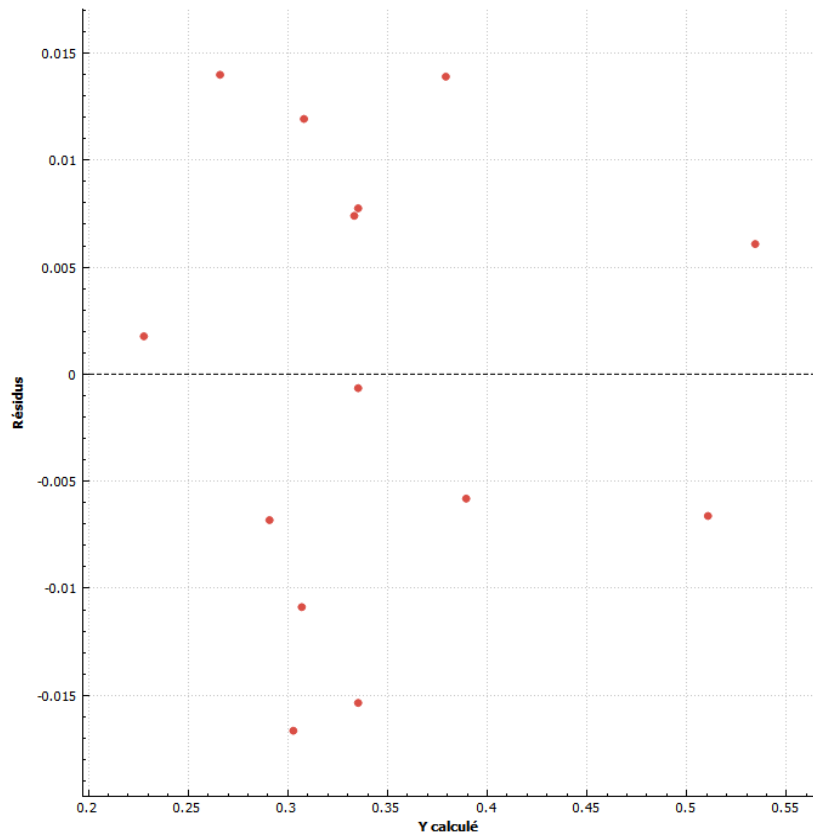
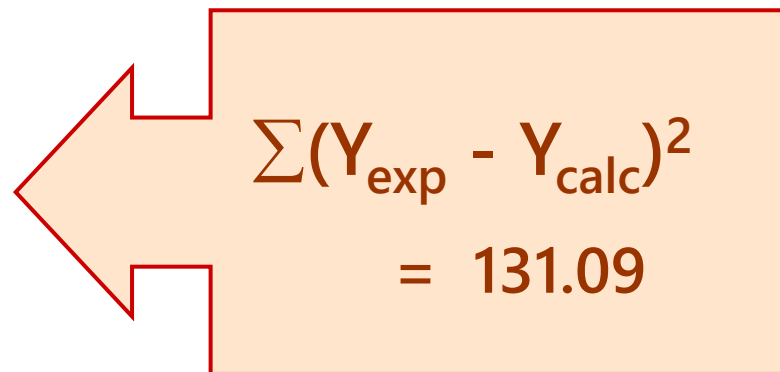


Tableau des résidus de la réponse : Efficacité

	Yexp.	Ycalc.	Différence
1	28.000	31.591	-3.591
2	72.000	72.505	-0.505
3	82.000	80.630	1.370
4	46.000	41.955	4.045
5	71.000	69.637	1.363
6	68.000	70.756	-2.756
7	51.000	47.258	3.742
8	52.000	56.503	-4.503
9	71.000	65.407	5.593
10	62.000	65.407	-3.407
11	66.000	65.407	0.593
12	64.000	61.908	2.092
13	65.000	66.700	-1.700
14	62.000	64.337	-2.337

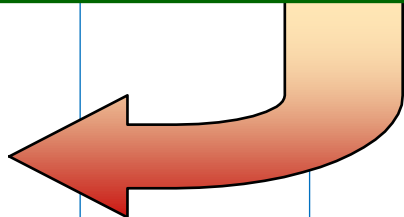

$$\sum (Y_{\text{exp}} - Y_{\text{calc}})^2 = 131.09$$

REPONSE : Efficacité

Analyse de la variance

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carré moyen
Résidus	131.090	8	16.386

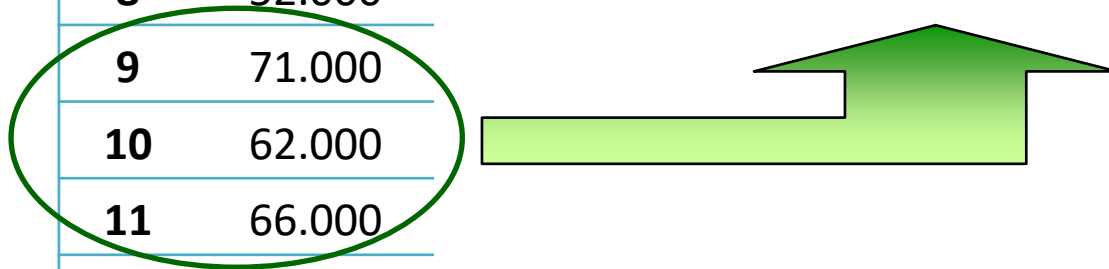
$N - p$
N : nombre d'expériences
p : nombre de coefficients du modèle
 $N = 14$ **$p = 6$**



	Yexp.
1	28.000
2	72.000
3	82.000
4	46.000
5	71.000
6	68.000
7	51.000
8	52.000
9	71.000
10	62.000
11	66.000
12	64.000
13	65.000
14	62.000

$$s^2 = [(71-66.3)^2 + (62-66.3)^2 + (66-66.3)^2] / (3-1)$$

$$= 20.33$$



REPONSE : Efficacité

Analyse de la variance

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carré moyen	Rapport	p value %
Résidus	131.090	8	16.386		
Validité	90.423	6	15.071	0.741	67.18
Erreur	40.667	2	20.333		

REPONSE : Efficacité

Analyse de la variance

$$\sum (Y_{cal} - Y_{moy.})^2 = 2224.339$$

$p - 1$

p : nombre de coefficients du modèle

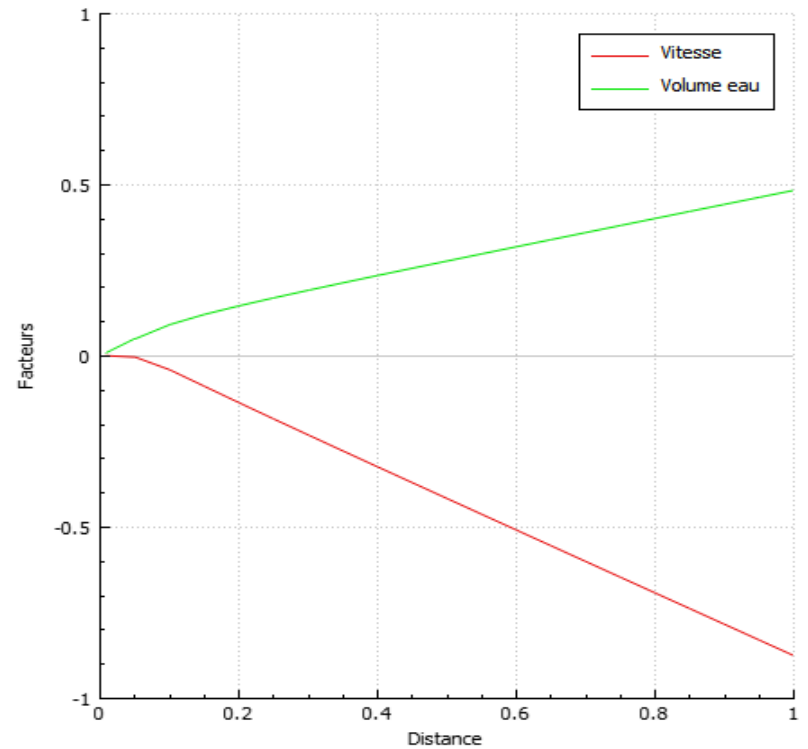
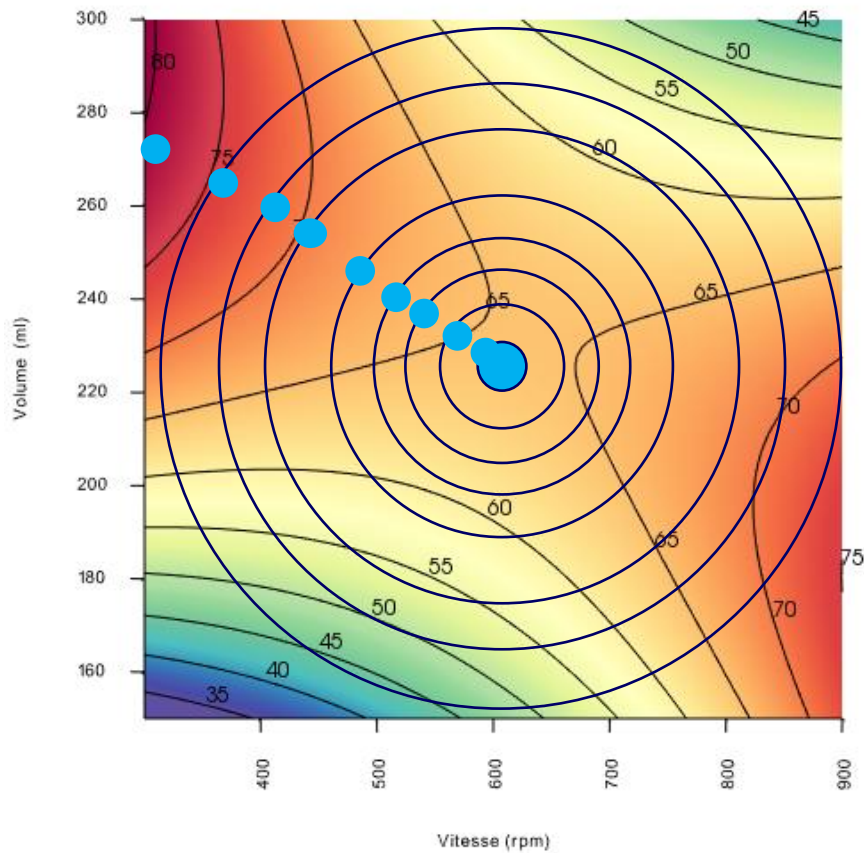
$p = 6$

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Coefficient moyen	Rapport	p value %
Régression	2224.339	5	44.868	27.149	0.01 ***
Résidus	131.090	8	16.386		
Validité	90.423	6	15.071	0.741	67.18
Erreur	40.667	2	20.333		
Total	2355.429	12			

Analyse de la variance - réponse : Granulométrie

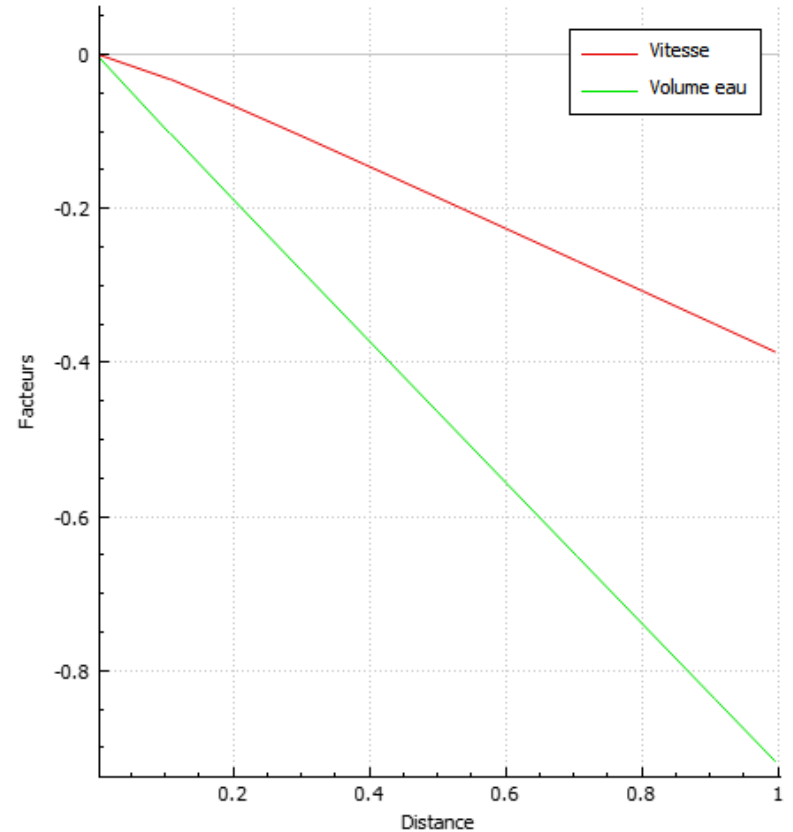
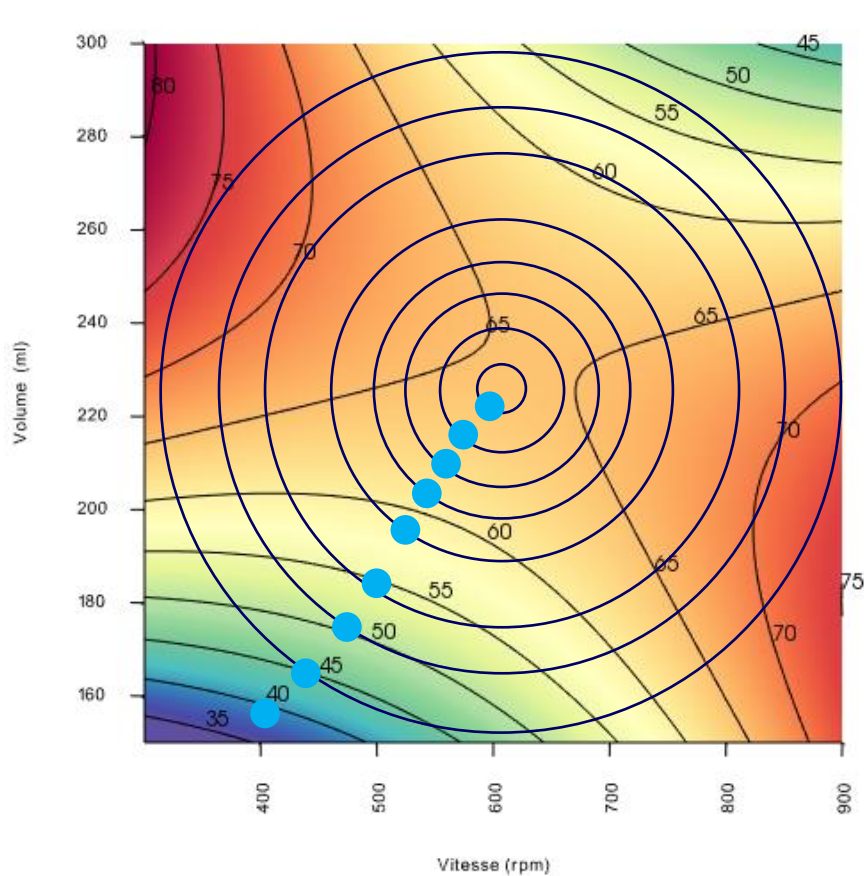
	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carré moyen	Rapport	p value
Régression	0.094289	5	0.018858	104.661	0.00 ***
Résidus	0.001441	8	0.000180		
Validité	0.001168	6	0.000195	1.4239	46.79
Erreur	0.000273	2	0.000137		
Total	0.095730	12			

Etude du chemin optimal



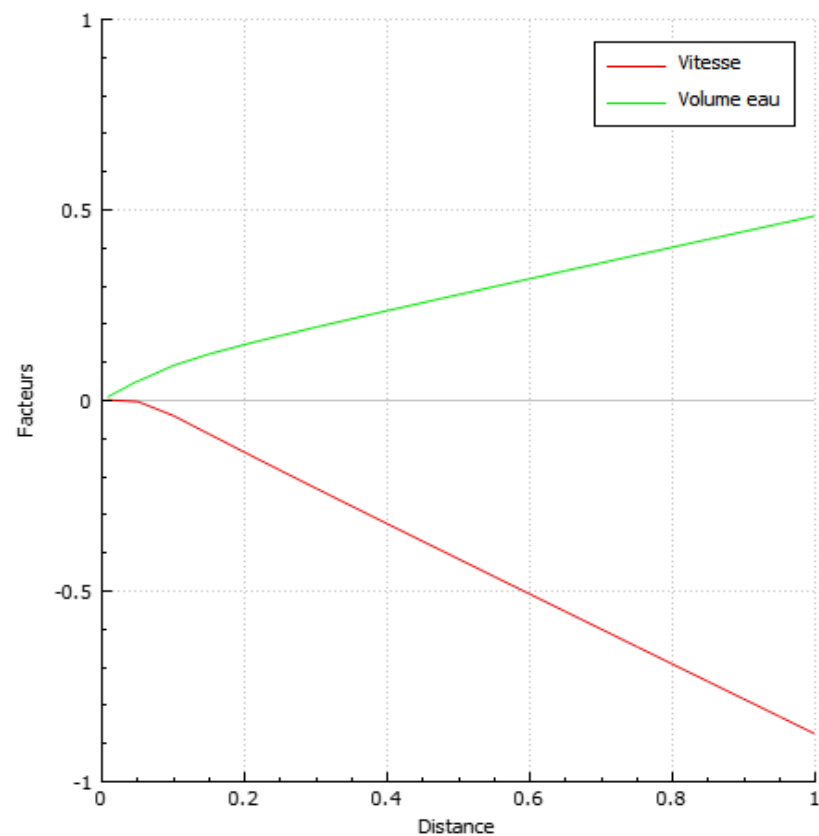
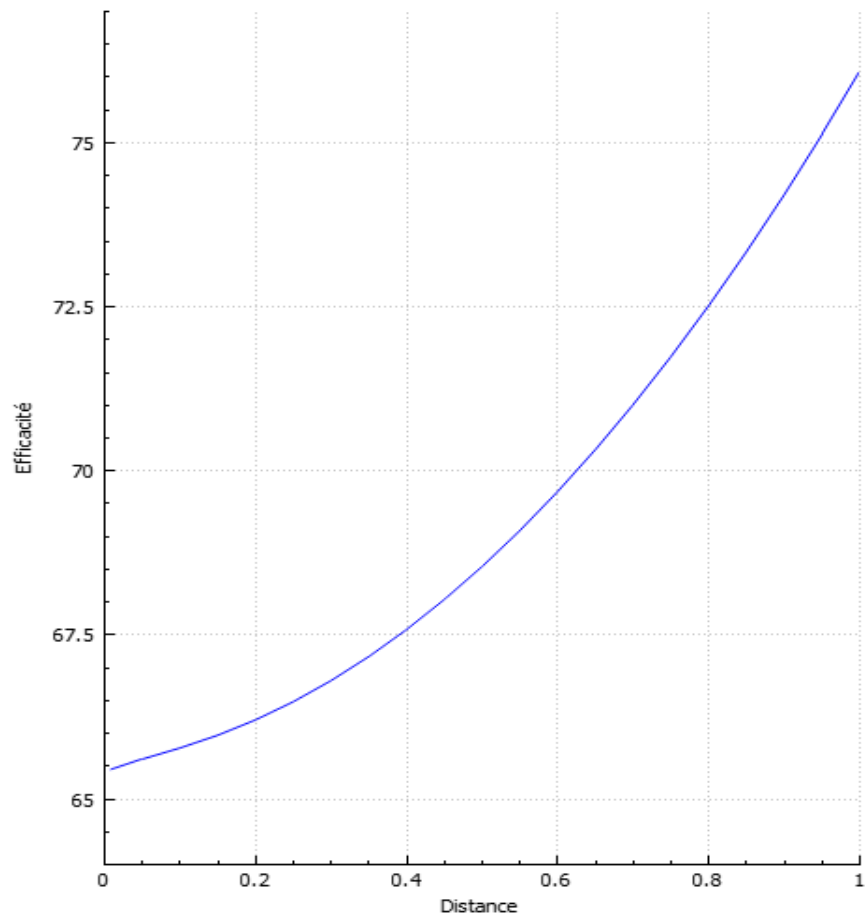
Maximisation

Etude du chemin optimal

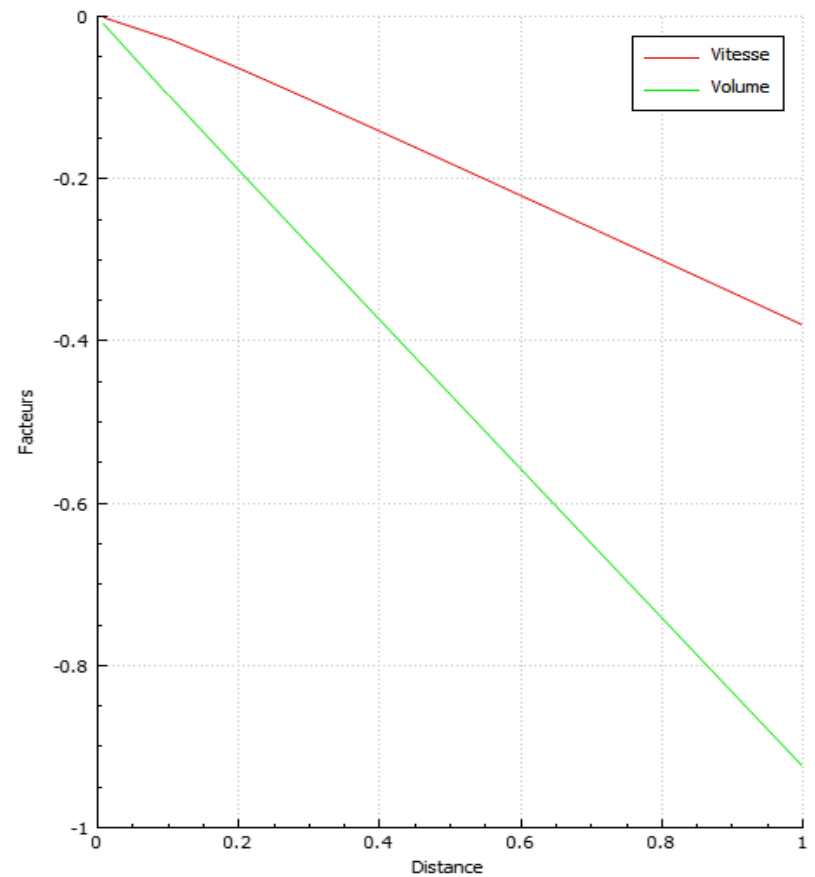
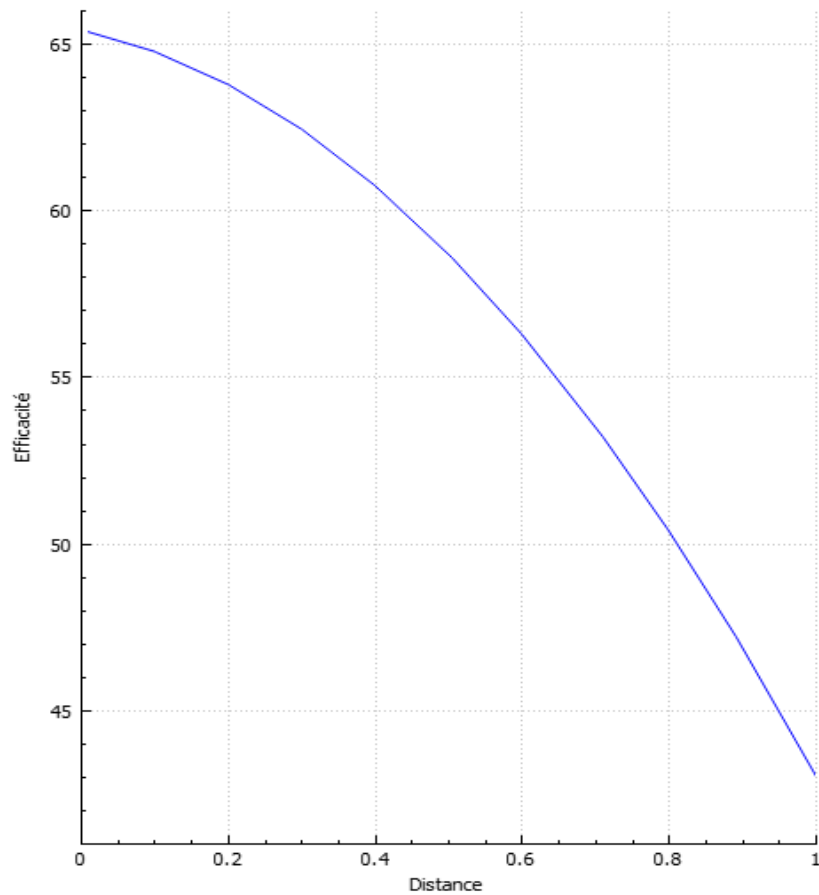


Minimisation

Etude du chemin optimal pour la réponse : Efficacité Maximisation

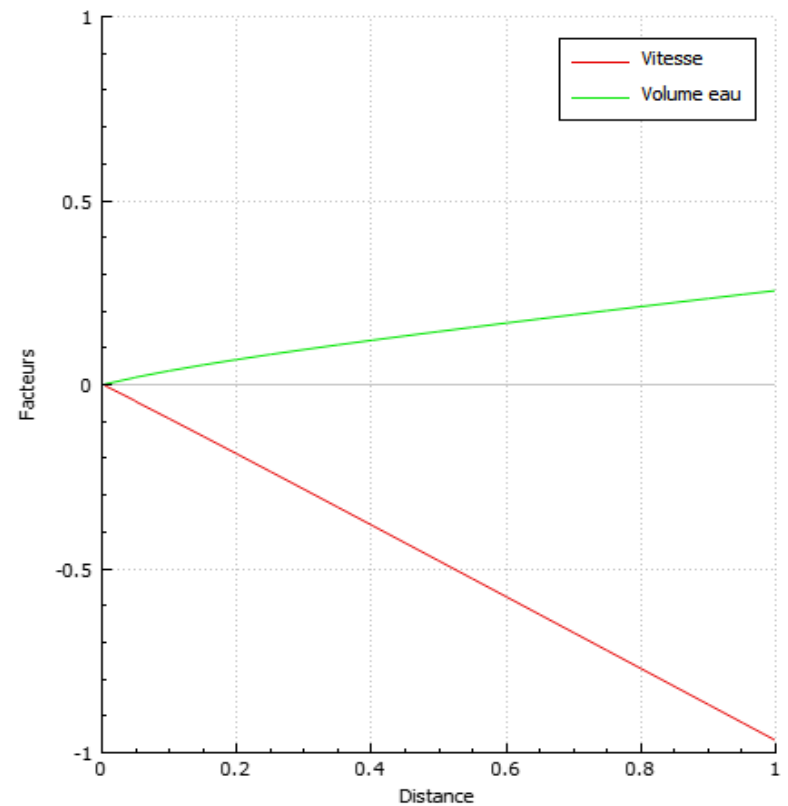
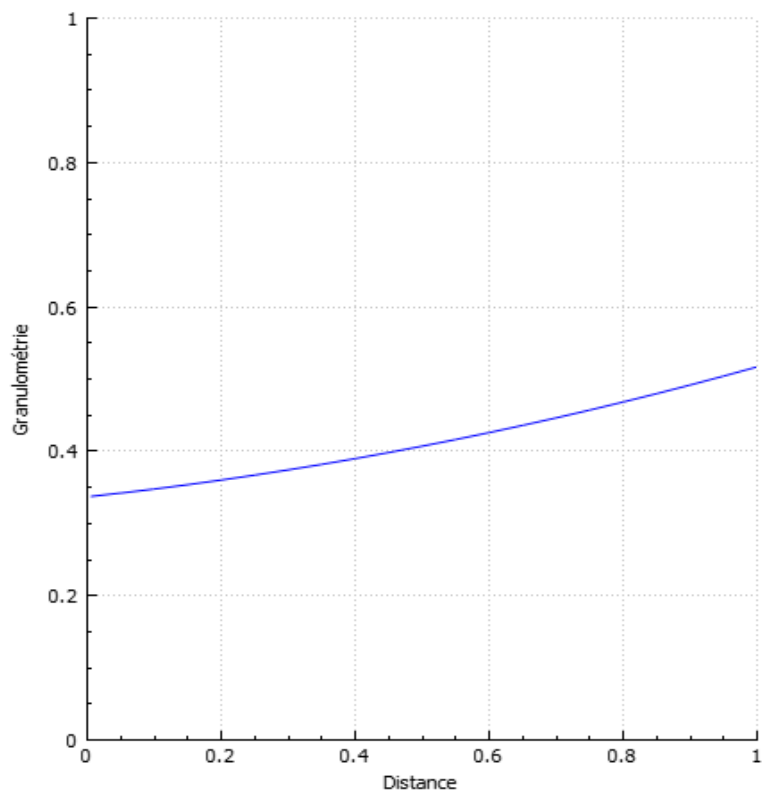


Etude du chemin optimal pour la réponse : Efficacité Minimisation



Etude du chemin optimal pour la réponse : Granulométrie

Maximisation



Etude du chemin optimal pour la réponse : Granulométrie

Minimisation

