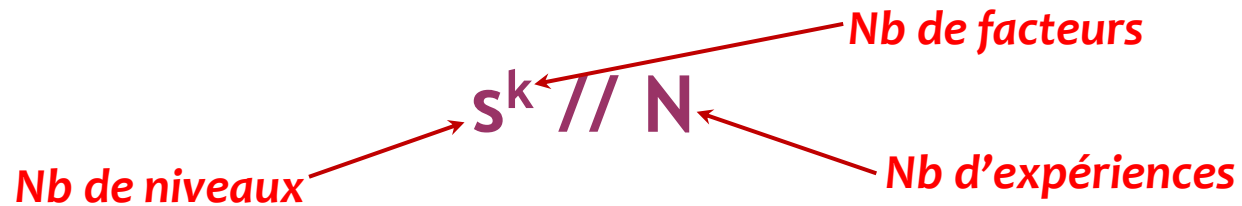


# Etude de criblage pour des facteurs à plus de 2 niveaux

*Matrices d'expériences symétriques et  
asymétriques*

# MATRICES D'EXPERIENCES DE CRIBLAGE



- d'Hadamard (Plackett et Burman)

- $2^k // N \quad (N \approx k+1)$

- symétriques

- $3^4 // 9$

- $4^5 // 16$

- $5^6 // 25$

- asymétriques

- $2^2 3^1 4^2 5^1 // N$

**Modèle mathématique associé aux  
plans de criblage à + de 2 niveaux**

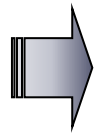


**Nombre d'expériences N,  
minimum**

- Modèle associé à une matrice d'Hadamard  
 ➔ modèle polynomial de degré 1

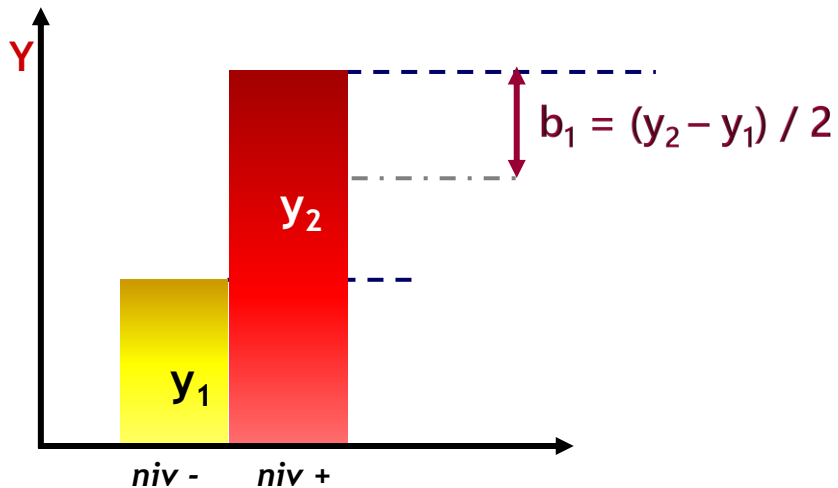
$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots \quad \text{avec, } X_j = \pm 1$$

| $N^\circ$ | $X_1$ | $Y$   |
|-----------|-------|-------|
| 1         | - 1   | $y_1$ |
| 2         | + 1   | $y_2$ |



$$b_0 = (+ y_1 + y_2) / 2$$

$$b_1 = (- y_1 + y_2) / 2$$

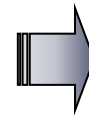


- Modèle "présence-absence" :

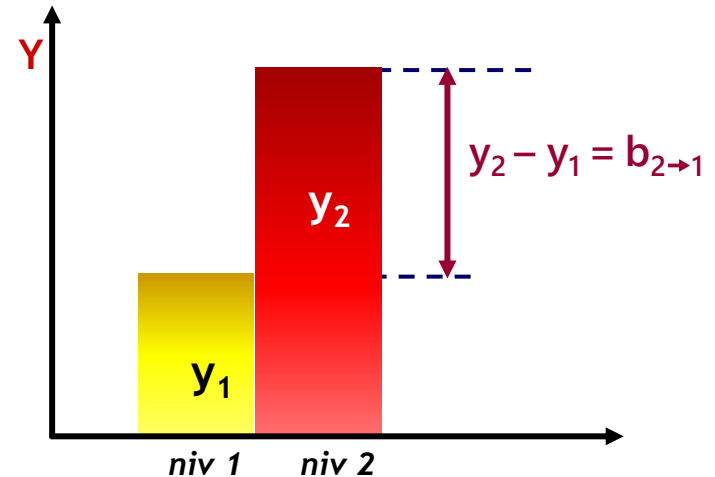
$$Y = b_0 + b_{1A} X_{1A}$$

avec,  $X_{1A} = 1$  ou  $0$ , selon que le niveau 1 est présent ou non

| $N^\circ$ | $X_1$ | $Y$   |
|-----------|-------|-------|
| 1         | 1     | $y_1$ |
| 2         | 2     | $y_2$ |

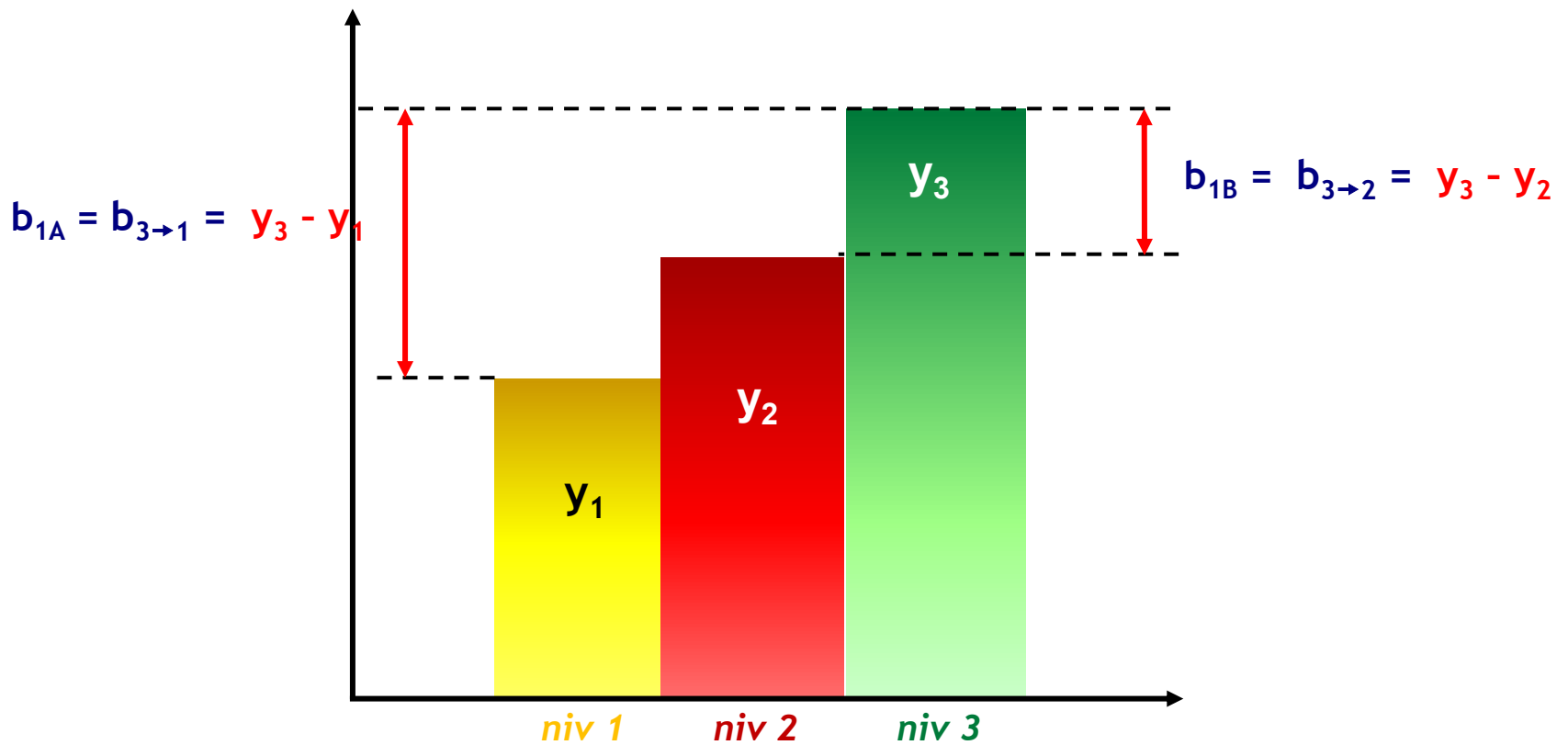


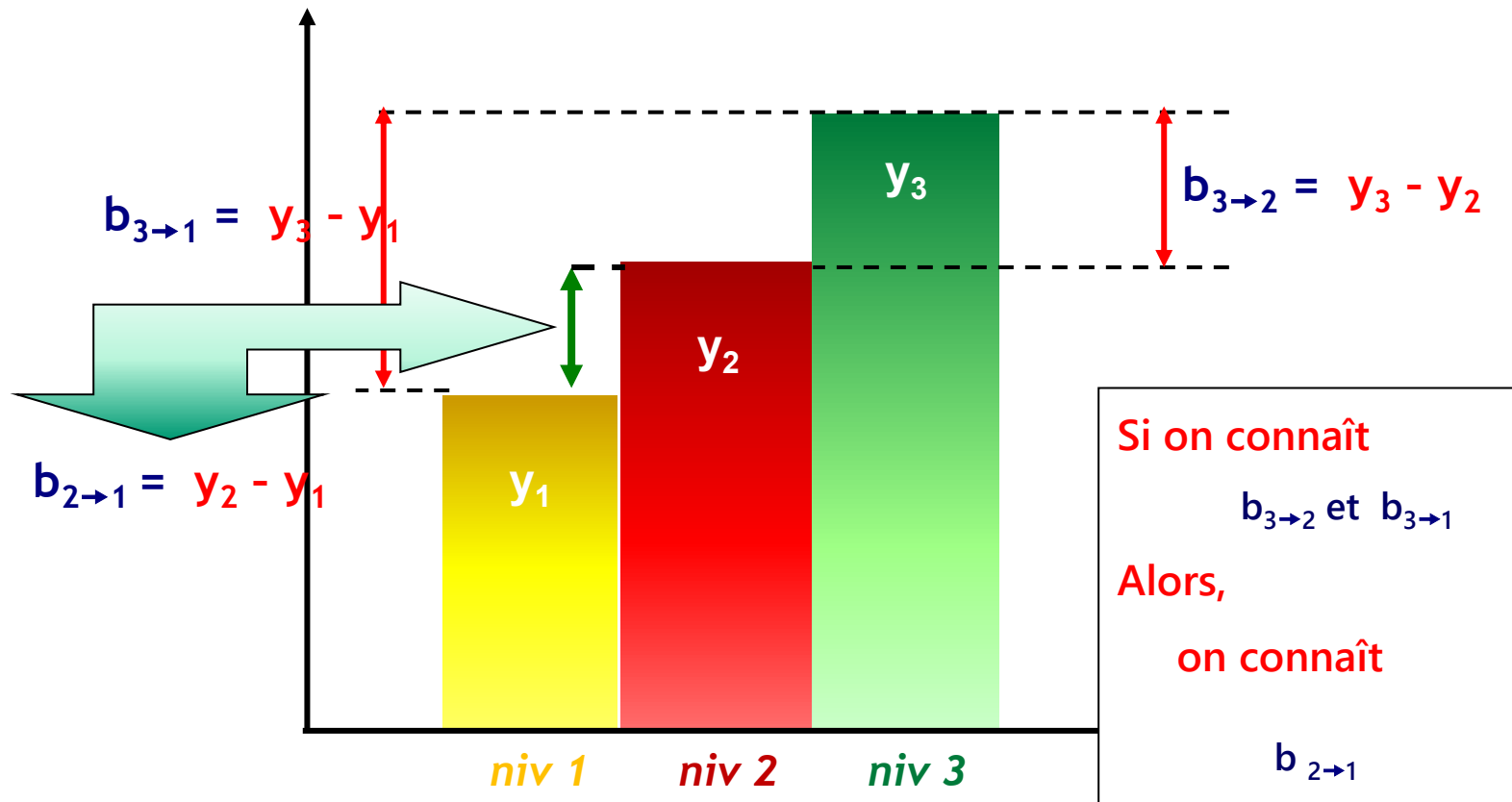
$$b_{1A} = b_{2 \rightarrow 1} = (y_2 - y_1)$$



- Pour 1 facteur à 3 niveaux :

$$Y = b_0 + b_{1A} X_{1A} + b_{1B} X_{1B} \quad \text{avec, } X_{1A} \text{ et } X_{1B} = 1 \text{ ou } 0, \text{ selon que le niveau 1 ou 2 est présent ou non}$$





$$b_{2 \rightarrow 1} = y_2 - y_1 = b_{3 \rightarrow 1} - b_{3 \rightarrow 2}$$

→ Facteurs à 2 niveaux :

1 variable avec 2 niveaux → 1 information  $b_j$

$k$  variables avec 2 niveaux →  $k$  informations  $b_j$

$$N \geq 1 + k$$

→ Facteurs à 3 niveaux :

1 variable avec 3 niveaux → 2 informations indépendantes

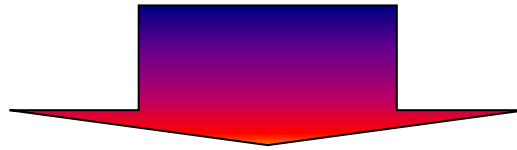
$b_{3-1}, b_{3-2}$  →  $b_{2-1}$

$k$  variables avec 3 niveaux →  $2k$  informations indépendantes

$$N \geq 1 + 2k$$

1 variable avec  $s$  niveaux  $\longrightarrow$   $(s-1)$  informations indépendantes

$k$  variables avec  $s$  niveaux  $\longrightarrow$   $k(s-1)$  informations indépendantes



$$N \geq 1 + k(s - 1)$$

$k_1$  variables avec  $s_1$  niveaux  $\longrightarrow (s_1-1)$  informations indépendantes

$k_2$  variables avec  $s_2$  niveaux  $\longrightarrow (s_2-1)$  informations indépendantes

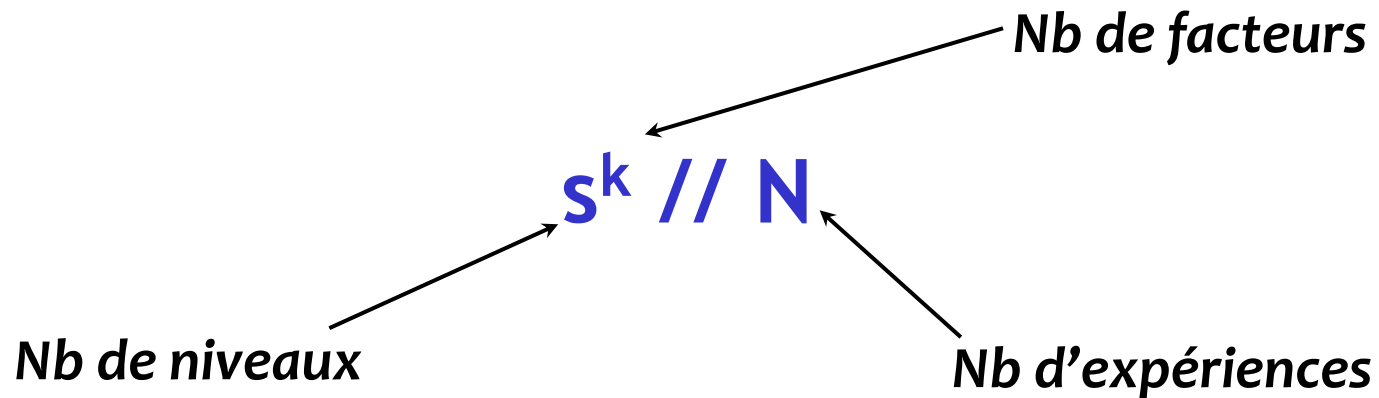
$k_r$  variables avec  $s_r$  niveaux  $\longrightarrow (s_r-1)$  informations indépendantes

$$N \geq 1 + k_1(s_1-1) + \dots\dots\dots + k_r(s_r-1)$$



$$N \geq 1 + \sum (s_j - 1)$$

# Matrices de criblage symétriques



**$2^{11} // 12 ; 3^4 // 9 ; 4^5 // 16 ; \dots$**

➡ Notation des niveaux dans la matrice d'expériences :

|                    |   | Matrice d'expériences |                |                |
|--------------------|---|-----------------------|----------------|----------------|
| <u>Variable X1</u> |   | X <sub>1</sub>        | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> |
| Niveau 1           | → | 0                     |                |                |
| Niveau 2           | → | 1                     |                |                |
| Niveau 3           | → | 2                     |                |                |
| ....               |   | ....                  |                |                |
| Niveau s           | → | s - 1                 |                |                |

## Domaine Expérimental

|       | Facteur                          | Niv. 0 | Niv. 1 | Niv. 2 |
|-------|----------------------------------|--------|--------|--------|
| $U_1$ | Durée traitement                 | 30 mn  | 45 mn  | 1h30   |
| $U_2$ | Gaz de dilution                  | G1     | G2     | G3     |
| $U_3$ | Méthode traitement               | M1     | M2     | M3     |
| $U_4$ | Ratio $\text{NH}_3/\text{BCl}_3$ | 0,5    | 1      | 3      |

Matrice d'expériences :  $3^4 // N$

Nombre minimum d'expériences :

$$N \geq 1 + \sum (s_j - 1)$$



$$N \geq 1 + 4(3 - 1)$$

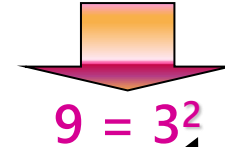
$$N \geq 9$$



*N optimal*  $\Rightarrow N = s^n$

- Construction de la matrice d'expériences :

Matrice symétrique 3<sup>4</sup>//9


$$9 = 3^2$$

2 colonnes de base

| N° | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> |
|----|----------------|----------------|
| 1  | 0              | 0              |
| 2  | 1              | 0              |
| 3  | 2              | 0              |
| 4  | 0              | 1              |
| 5  | 1              | 1              |
| 6  | 2              | 1              |
| 7  | 0              | 2              |
| 8  | 1              | 2              |
| 9  | 2              | 2              |

Les colonnes supplémentaires sont obtenues par :

$$X_3 = X_1 + X_2 \text{ (Modulo 3)}$$

$$X_4 = X_1 + 2 X_2 \text{ (Modulo 3)}$$

Dans le cas où **s**, le nombre de niveaux, est un nombre premier, les règles d'addition et multiplications sont les suivantes :

| N° | $X_1$ | $X_2$ |
|----|-------|-------|
| 1  | 0     | 0     |
| 2  | 1     | 0     |
| 3  | 2     | 0     |
| 4  | 0     | 1     |
| 5  | 1     | 1     |
| 6  | 2     | 1     |
| 7  | 0     | 2     |
| 8  | 1     | 2     |
| 9  | 2     | 2     |

# Plan d'expérimentation et réponse expérimentale

| Exper. | Durée  | Gaz | Méthode | Ratio |
|--------|--------|-----|---------|-------|
| 1      | 30 min | G1  | M1      | 0.5   |
| 2      | 45 min | G1  | M2      | 1     |
| 3      | 1h30   | G1  | M3      | 3     |
| 4      | 30 min | G2  | M2      | 3     |
| 5      | 45 min | G2  | M3      | 0.5   |
| 6      | 1h30   | G2  | M1      | 1     |
| 7      | 30 min | G3  | M3      | 1     |
| 8      | 45 min | G3  | M1      | 3     |
| 9      | 1h30   | G3  | M2      | 0.5   |

## Estimations des coefficients du modèle :

$$\eta = b_0 + b_{1A} X_{1A} + b_{1B} X_{1B} + b_{2A} X_{2A} + b_{2B} X_{2B} \\ + b_{3A} X_{3A} + b_{3B} X_{3B} + b_{4A} X_{4A} + b_{4B} X_{4B}$$

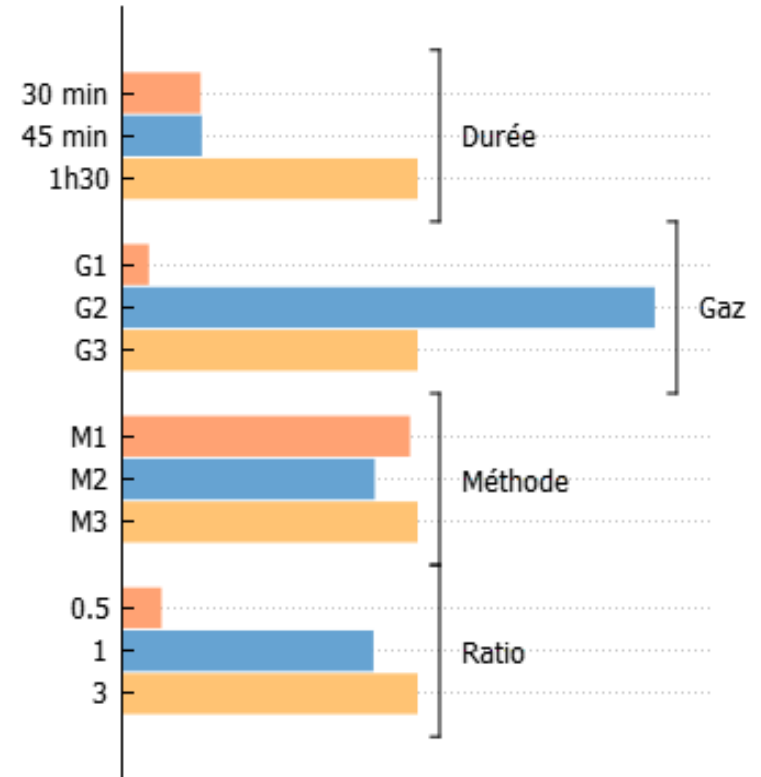
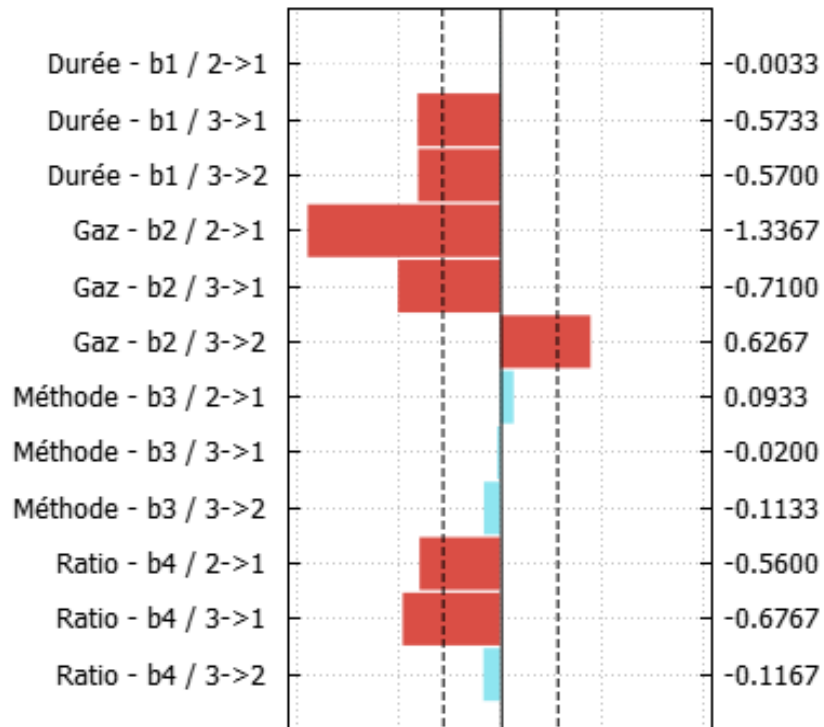
| Nom      | Coeff   |
|----------|---------|
| $b_0$    | 3.0900  |
| $b_{1A}$ | -0.5733 |
| $b_{1B}$ | -0.5700 |
| $b_{2A}$ | -0.7100 |
| $b_{2B}$ | 0.6267  |
| $b_{3A}$ | -0.0200 |
| $b_{3B}$ | -0.1133 |
| $b_{4A}$ | -0.6767 |
| $b_{4B}$ | -0.1167 |

| Coefficients |         |
|--------------|---------|
| b0           | 3.0900  |
| b1A          | -0.5733 |
| b1B          | -0.5700 |
| b2A          | -0.7100 |
| b2B          | 0.6267  |
| b3A          | -0.0200 |
| b3B          | -0.1133 |
| b4A          | -0.6767 |
| b4B          | -0.1167 |

**Différence de poids entre 2 niveaux**

| Effets    |         |
|-----------|---------|
|           | 3.09000 |
| b1 / 2->1 | -0.0033 |
| b1 / 3->1 | -0.5733 |
| b1 / 3->2 | -0.5700 |
| b2 / 2->1 | -1.3367 |
| b2 / 3->1 | -0.7100 |
| b2 / 3->2 | 0.6267  |
| b3 / 2->1 | 0.0933  |
| b3 / 3->1 | -0.0200 |
| b3 / 3->2 | -0.1133 |
| b4 / 2->1 | -0.5600 |
| b4 / 3->1 | -0.6767 |
| b4 / 3->2 | -0.1167 |

## Etude graphique des effets de la réponse $Y_1$



# Matrice symétrique 4<sup>5</sup>//16

## Étude et optimisation d'un procédé de collage

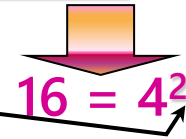
*L'étude d'un stockage provisoire d'une fibre rigide sur un support conique, a conduit à formuler une colle comprenant des charges liquides : l'application d'une colle comportant uniquement des charges liquides réduit les problèmes liés à la sédimentation des charges et au nettoyage du système d'enduction. Les responsables de l'étude ont choisi d'étudier le collage et d'en optimiser les performances.*

### Domaine expérimental

| <i><b>Facteurs</b></i>                     | <b>Niveau 0</b> | <b>Niveau 1</b> | <b>Niveau 2</b> | <b>Niveau 3</b> |
|--------------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <b>U<sub>1</sub> : Dilution colle</b>      | 5 %             | 10 %            | 12 %            | 15 %            |
| <b>U<sub>2</sub> : Type de résine</b>      | Type 1          | Type 2          | Type 3          | Type 4          |
| <b>U<sub>3</sub> : Durée séchage</b>       | 1 h             | 2 h             | 3 h             | 6 h             |
| <b>U<sub>4</sub> : Durée du traitement</b> | 2 min           | 5 min           | 10 mn           | 15 mn           |
| <b>U<sub>5</sub> : Nature du solvant</b>   | n-Heptane       | Propanol-2      | Hexane          | Cyclohexane     |

## Matrice symétrique 4<sup>5</sup>//16

2 colonnes de base


$$16 = 4^2$$

| N° | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> |
|----|----------------|----------------|
| 1  | 0              | 0              |
| 2  | 1              | 0              |
| 3  | 2              | 0              |
| 4  | 3              | 0              |
| 5  | 0              | 1              |
| 6  | 1              | 1              |
| 7  | 2              | 1              |
| 8  | 3              | 1              |
| 9  | 0              | 2              |
| 10 | 1              | 2              |
| 11 | 2              | 2              |
| 12 | 3              | 2              |
| 13 | 0              | 3              |
| 14 | 1              | 3              |
| 15 | 2              | 3              |
| 16 | 3              | 3              |

Les colonnes supplémentaires sont obtenues par :

$$X_3 = X_1 + X_2$$

$$X_4 = X_1 + 2 X_2$$

$$X_5 = X_1 + 3 X_2$$

Dans le cas où **s**, le nombre de niveaux, n'est pas un nombre premier, les règles d'addition et multiplications sont différentes

| N° | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | X <sub>5</sub> |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1  | 0              | 0              |                |                |                |
| 2  | 1              | 0              |                |                |                |
| 3  | 2              | 0              |                |                |                |
| 4  | 3              | 0              |                |                |                |
| 5  | 0              | 1              |                |                |                |
| 6  | 1              | 1              |                |                |                |
| 7  | 2              | 1              |                |                |                |
| 8  | 3              | 1              |                |                |                |
| 9  | 0              | 2              |                |                |                |
| 10 | 1              | 2              |                |                |                |
| 11 | 2              | 2              |                |                |                |
| 12 | 3              | 2              |                |                |                |
| 13 | 0              | 3              |                |                |                |
| 14 | 1              | 3              |                |                |                |
| 15 | 2              | 3              |                |                |                |
| 16 | 3              | 3              |                |                |                |

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| × | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 2 |

Les colonnes supplémentaires sont obtenues par :

$$X_3 = X_1 + X_2$$

$$X_4 = X_1 + 2 X_2$$

$$X_5 = X_1 + 3 X_2$$

Dans le cas où **s**, le nombre de niveaux, n'est pas un nombre premier, les règles d'addition et multiplications sont différentes

| N° | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> |
|----|----------------|----------------|
| 1  | 0              | 0              |
| 2  | 1              | 0              |
| 3  | 2              | 0              |
| 4  | 3              | 0              |
| 5  | 0              | 1              |
| 6  | 1              | 1              |
| 7  | 2              | 1              |
| 8  | 3              | 1              |
| 9  | 0              | 2              |
| 10 | 1              | 2              |
| 11 | 2              | 2              |
| 12 | 3              | 2              |
| 13 | 0              | 3              |
| 14 | 1              | 3              |
| 15 | 2              | 3              |
| 16 | 3              | 3              |

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Les colonnes supplémentaires sont obtenues par :

$$X_3 = X_1 + X_2$$

$$X_4 = X_1 + 2 X_2$$

$$X_5 = X_1 + 3 X_2$$

Dans le cas où **s**, le nombre de niveaux, n'est pas un nombre premier, les règles d'addition et multiplications sont différentes

| N° | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> |
|----|----------------|----------------|----------------|
| 1  | 0              | 0              | 0              |
| 2  | 1              | 0              | 1              |
| 3  | 2              | 0              | 2              |
| 4  | 3              | 0              | 3              |
| 5  | 0              | 1              | 1              |
| 6  | 1              | 1              | 0              |
| 7  | 2              | 1              | 3              |
| 8  | 3              | 1              | 2              |
| 9  | 0              | 2              | 2              |
| 10 | 1              | 2              | 3              |
| 11 | 2              | 2              | 0              |
| 12 | 3              | 2              | 1              |
| 13 | 0              | 3              | 3              |
| 14 | 1              | 3              | 2              |
| 15 | 2              | 3              | 1              |
| 16 | 3              | 3              | 0              |

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| × | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 2 |

Les colonnes supplémentaires sont obtenues par :

$$X_3 = X_1 + X_2$$

$$X_4 = X_1 + 2 X_2$$

$$X_5 = X_1 + 3 X_2$$

Dans le cas où **s**, le nombre de niveaux, n'est pas un nombre premier, les règles d'addition et multiplications sont différentes

| $N^\circ$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|-----------|-------|-------|-------|
| 1         | 0     | 0     | 0     |
| 2         | 1     | 0     | 1     |
| 3         | 2     | 0     | 2     |
| 4         | 3     | 0     | 3     |
| 5         | 0     | 1     | 1     |
| 6         | 1     | 1     | 0     |
| 7         | 2     | 1     | 3     |
| 8         | 3     | 1     | 2     |
| 9         | 0     | 2     | 2     |
| 10        | 1     | 2     | 3     |
| 11        | 2     | 2     | 0     |
| 12        | 3     | 2     | 1     |
| 13        | 0     | 3     | 3     |
| 14        | 1     | 3     | 2     |
| 15        | 2     | 3     | 1     |
| 16        | 3     | 3     | 0     |

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| × | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 2 |

Les colonnes supplémentaires sont obtenues par :

$$X_3 = X_1 + X_2$$

$$X_4 = X_1 + 2 X_2$$

$$X_5 = X_1 + 3 X_2$$

Dans le cas où **s**, le nombre de niveaux, n'est pas un nombre premier, les règles d'addition et multiplications sont différentes

| $N^\circ$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| 1         | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 2         | 1     | 0     | 1     | 1     |
| 3         | 2     | 0     | 2     | 2     |
| 4         | 3     | 0     | 3     | 3     |
| 5         | 0     | 1     | 1     | 2     |
| 6         | 1     | 1     | 0     | 3     |
| 7         | 2     | 1     | 3     | 0     |
| 8         | 3     | 1     | 2     | 1     |
| 9         | 0     | 2     | 2     | 3     |
| 10        | 1     | 2     | 3     | 2     |
| 11        | 2     | 2     | 0     | 1     |
| 12        | 3     | 2     | 1     | 0     |
| 13        | 0     | 3     | 3     | 1     |
| 14        | 1     | 3     | 2     | 0     |
| 15        | 2     | 3     | 1     | 3     |
| 16        | 3     | 3     | 0     | 2     |

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| × | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 2 |

Les colonnes supplémentaires sont obtenues par :

$$X_3 = X_1 + X_2$$

$$X_4 = X_1 + 2 X_2$$

$$X_5 = X_1 + 3 X_2$$

Dans le cas où **s**, le nombre de niveaux, n'est pas un nombre premier, les règles d'addition et multiplications sont différentes

| N° | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1  | 0              | 0              | 0              | 0              |
| 2  | 1              | 0              | 1              | 1              |
| 3  | 2              | 0              | 2              | 2              |
| 4  | 3              | 0              | 3              | 3              |
| 5  | 0              | 1              | 1              | 2              |
| 6  | 1              | 1              | 0              | 3              |
| 7  | 2              | 1              | 3              | 0              |
| 8  | 3              | 1              | 2              | 1              |
| 9  | 0              | 2              | 2              | 3              |
| 10 | 1              | 2              | 3              | 2              |
| 11 | 2              | 2              | 0              | 1              |
| 12 | 3              | 2              | 1              | 0              |
| 13 | 0              | 3              | 3              | 1              |
| 14 | 1              | 3              | 2              | 0              |
| 15 | 2              | 3              | 1              | 3              |
| 16 | 3              | 3              | 0              | 2              |

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| × | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 2 |

## Plan d'expérimentation

| <i>Exp.</i> | Dilution | Résine | Séchage | Traitement | Solvant     |
|-------------|----------|--------|---------|------------|-------------|
| <b>1</b>    | 5%       | R1     | 1h      | 2 mn       | n-Heptane   |
| <b>2</b>    | 10%      | R1     | 2h      | 5 mn       | Propanol-2  |
| <b>3</b>    | 12%      | R1     | 3h      | 10 mn      | Hexane      |
| <b>4</b>    | 15%      | R1     | 6h      | 15 mn      | Cyclohexane |
| <b>5</b>    | 5%       | R2     | 2h      | 10 mn      | Cyclohexane |
| <b>6</b>    | 10%      | R2     | 1h      | 15 mn      | Hexane      |
| <b>7</b>    | 12%      | R2     | 6h      | 2 mn       | Propanol-2  |
| <b>8</b>    | 15%      | R2     | 3h      | 5 mn       | n-Heptane   |
| <b>9</b>    | 5%       | R3     | 3h      | 15 mn      | Propanol-2  |
| <b>10</b>   | 10%      | R3     | 6h      | 10 mn      | n-Heptane   |
| <b>11</b>   | 12%      | R3     | 1h      | 5 mn       | Cyclohexane |
| <b>12</b>   | 15%      | R3     | 2h      | 2 mn       | Hexane      |
| <b>13</b>   | 5%       | R4     | 6h      | 5 mn       | Hexane      |
| <b>14</b>   | 10%      | R4     | 3h      | 2 mn       | Cyclohexane |
| <b>15</b>   | 12%      | R4     | 2h      | 15 mn      | n-Heptane   |
| <b>16</b>   | 15%      | R4     | 1h      | 10 mn      | Propanol-2  |

## Estimations des coefficients du modèle :

| Nom      | Coefficient | Nom      | Coefficient |
|----------|-------------|----------|-------------|
| Cste     | 3.9475      | $b_{3B}$ | 0.5275      |
| $b_{1A}$ | 1.36500     | $b_{3C}$ | -0.0450     |
| $b_{1B}$ | 0.12750     | $b_{4A}$ | -0.23000    |
| $b_{1C}$ | 0.24500     | $b_{4B}$ | -0.17750    |
| $b_{2A}$ | -1.14750    | $b_{4C}$ | -0.11500    |
| $b_{2B}$ | -0.03500    | $b_{5A}$ | -1.17000    |
| $b_{2C}$ | -1.01000    | $b_{5B}$ | -0.92750    |
| $b_{3A}$ | 1.3950      | $b_{5C}$ | 0.06500     |

## Coefficients - % Dégradation

| Coefficients |                 |
|--------------|-----------------|
| <b>b0</b>    | <b>3.94750</b>  |
| <b>b1A</b>   | <b>1.36500</b>  |
| <b>b1B</b>   | <b>0.12750</b>  |
| <b>b1C</b>   | <b>0.24500</b>  |
| <b>b2A</b>   | <b>-1.14750</b> |
| <b>b2B</b>   | <b>-0.03500</b> |
| <b>b2C</b>   | <b>-1.01000</b> |
| <b>b3A</b>   | <b>1.39500</b>  |
| <b>b3B</b>   | <b>0.52750</b>  |
| <b>b3C</b>   | <b>-0.04500</b> |
| <b>b4A</b>   | <b>-0.23000</b> |
| <b>b4B</b>   | <b>-0.17750</b> |
| <b>b4C</b>   | <b>-0.11500</b> |
| <b>b5A</b>   | <b>-1.17000</b> |
| <b>b5B</b>   | <b>-0.92750</b> |
| <b>b5C</b>   | <b>0.06500</b>  |

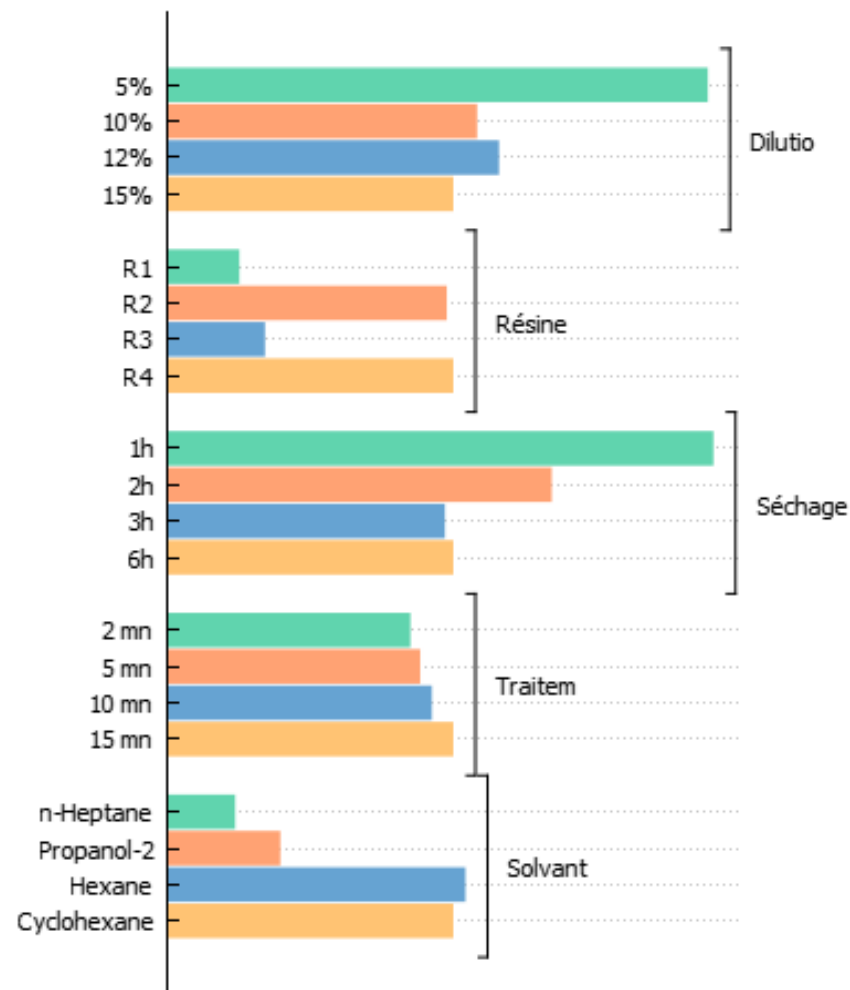
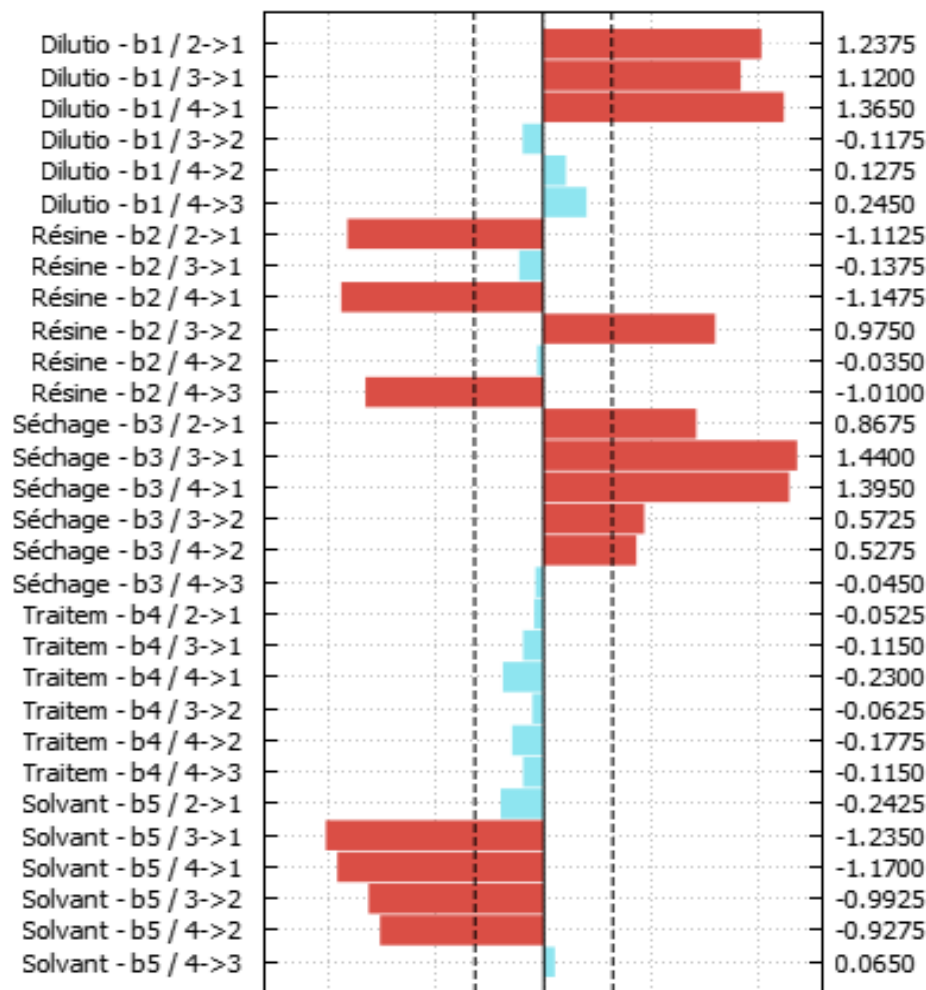


| Effets              |          |
|---------------------|----------|
|                     | 3.94750  |
| <b>b1 / 2-&gt;1</b> | 1.23750  |
| <b>b1 / 3-&gt;1</b> | 1.12000  |
| <b>b1 / 4-&gt;1</b> | 1.36500  |
| <b>b1 / 3-&gt;2</b> | -0.11750 |
| <b>b1 / 4-&gt;2</b> | 0.12750  |
| <b>b1 / 4-&gt;3</b> | 0.24500  |
| <b>b2 / 2-&gt;1</b> | -1.11250 |
| <b>b2 / 3-&gt;1</b> | -0.13750 |
| <b>b2 / 4-&gt;1</b> | -1.14750 |
| <b>b2 / 3-&gt;2</b> | 0.97500  |
| <b>b2 / 4-&gt;2</b> | -0.03500 |
| <b>b2 / 4-&gt;3</b> | -1.01000 |
| <b>b3 / 2-&gt;1</b> | 0.86750  |
| <b>b3 / 3-&gt;1</b> | 1.44000  |
| <b>b3 / 4-&gt;1</b> | 1.39500  |
| <b>b3 / 3-&gt;2</b> | 0.57250  |
| <b>b3 / 4-&gt;2</b> | 0.52750  |
| <b>b3 / 4-&gt;3</b> | -0.04500 |

|                     |          |
|---------------------|----------|
| <b>b4 / 2-&gt;1</b> | -0.05250 |
| <b>b4 / 3-&gt;1</b> | -0.11500 |
| <b>b4 / 4-&gt;1</b> | -0.23000 |
| <b>b4 / 3-&gt;2</b> | -0.06250 |
| <b>b4 / 4-&gt;2</b> | -0.17750 |
| <b>b4 / 4-&gt;3</b> | -0.11500 |
| <b>b5 / 2-&gt;1</b> | -0.24250 |
| <b>b5 / 3-&gt;1</b> | -1.23500 |
| <b>b5 / 4-&gt;1</b> | -1.17000 |
| <b>b5 / 3-&gt;2</b> | -0.99250 |
| <b>b5 / 4-&gt;2</b> | -0.92750 |
| <b>b5 / 4-&gt;3</b> | 0.06500  |

# Etude graphique des effets de la réponse $Y_1$

## Etude graphique des effets totaux



# Matrices asymétriques

$$S_1^{t_1} S_2^{t_2} S_3^{t_3} \dots // N$$

*La condition nécessaire et suffisante pour que les estimations des "poids" de chaque niveau soient obtenues indépendamment est que les niveaux d'une variable soient combinés avec chacun des niveaux d'une autre variable suivant des fréquences proportionnelles.*

Les matrices asymétriques se construisent à partir des matrices de criblage **symétriques saturées**

# Méthode des correspondances

Addelmans S.

*Orthogonal main-effect plans for asymmetrical factorial experiments,  
Technometrics, 1962, 4, 21-46.*

## ➔ Correspondance A :

- 1 colonne à 3 niveaux est remplacée par 1 colonne à 2 niveaux,  
.....
- 1 colonne à  $s$  niveaux est remplacée par 1 colonne à  $s_1$  niveaux, avec la condition :

$$\sqrt{s} < s_1 < s$$

$s$  : nombre de niveaux de la matrice symétrique.

*Par exemple, une colonne à 4 niveaux peut être remplacée par 1 colonne à 3 niveaux, avec la correspondance :*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

### Matrice symétrique $3^4//9$

| N° | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
|----|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 2  | 1     | 0     | 1     | 1     |
| 3  | 2     | 0     | 2     | 2     |
| 4  | 0     | 1     | 1     | 2     |
| 5  | 1     | 1     | 2     | 0     |
| 6  | 2     | 1     | 0     | 1     |
| 7  | 0     | 2     | 2     | 1     |
| 8  | 1     | 2     | 0     | 2     |
| 9  | 2     | 2     | 1     | 0     |

↓  
1 colonne  
à 3 niveaux

### Matrice asymétrique $2^1 3^3//9$

↓

## ➔ Correspondance A : $5^6//25$

- 1 colonne à 3 niveaux est remplacée par 1 colonne à 2 niveaux,
- .....
- 1 colonne à  $s$  niveaux est remplacée par 1 colonne à  $s_1$  niveaux, avec la condition :

$$\sqrt{s} < s_1 < s$$

$s$  : nombre de niveaux de la matrice symétrique.

une colonne à 5 niveaux peut être remplacée par 1 colonne à  $s_1$  niveaux, avec :

$$\sqrt{5} < s_1 < 5 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 3, 4$$

| <u>5 Niveaux</u>                                                  |   | <u>4 Niveaux</u> |   | <u>3 Niveaux</u> |
|-------------------------------------------------------------------|---|------------------|---|------------------|
| 0                                                                 | → | 0                | → | 0                |
| 1                                                                 | → | 1                | → | 1                |
| 2                                                                 | → | 2                | → | 2                |
| 3                                                                 | → | 3                | → | 1                |
| 4                                                                 | → | 0                | → | 0                |
| $5^6//25 \longrightarrow 4^1 5^5//25 \longrightarrow 3^1 5^5//25$ |   |                  |   |                  |

## ➔ Correspondance B :

Si le nombre de niveaux dans la matrice symétrique saturée est égal à une puissance d'un nombre premier, on peut réaliser la **correspondance B**, dans laquelle,

- une colonne à  $s$  niveaux peut être remplacée par

$$\frac{(s - 1)}{(s_i - 1)} \quad \text{colonnes à } s_i \text{ niveaux,}$$

avec,  $s_i \leq \sqrt{s}$

*Par exemple, une colonne à 4 niveaux ( $s = 4$ ) peut être remplacée par  $(4-1)/(2-1) = 3$  colonnes à 2 niveaux ( $s_i = 2$ ), selon la correspondance B :*

Quatre niveaux

0 →  
1 →  
2 →  
3 →

Deux niveaux

0 0 0  
1 0 1  
0 1 1  
1 1 0

ou

0 0 1  
1 0 0  
0 1 0  
1 1 1

$$4^5//16 \rightarrow 2^3 4^4//16$$

## Cas d'étude :

Une usine qui fabrique des têtes de forage veut trouver des paramètres qui peuvent allonger la durée de vie des pièces fabriquées. Pour cela, ils ont fait la liste des facteurs susceptibles d'avoir de l'influence sur la durée de vie et ont précisé les niveaux d'étude de chacun des facteurs.  
Au total, ils ont décidé d'étudier 6 facteurs.

### Réponse:

Durée de vie

## Cas d'étude :

### Domaine Expérimental

|       | FACTEURS             | Niv 0     | Niv 1     | Niv 2 | Niv 3 |
|-------|----------------------|-----------|-----------|-------|-------|
| $U_1$ | Type tête de forage  | neuf      | récupéré  |       |       |
| $U_2$ | Taille               | 0.125 mm  | 0.25mm    |       |       |
| $U_3$ | Vitesse de forage    | 400 tr/mn | 800 tr/mn |       |       |
| $U_4$ | Matériel             | mou       | dur       |       |       |
| $U_5$ | Usine de fabrication | Chicago   | Kansas    | Miami |       |
| $U_6$ | Opérateur            | A         | B         | C     | D     |

→ Construction de la matrice d'expériences asymétrique  $2^4 3^1 4^1 // N$

Nombre minimum d'expériences :

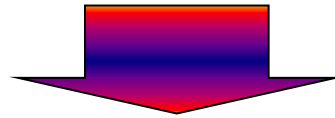
$$N \geq 1 + \sum (s_j - 1)$$

$$N \geq 1 + (4 \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 3)$$

$$\geq 10 \text{ expériences}$$



Construction de la matrice d'expériences :



$2^4 3^1 4^1 // 16$

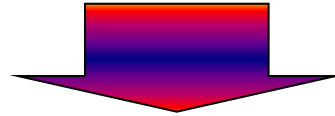
→ Construction de la matrice d'expériences asymétrique  $2^4 3^1 4^1 // N$

Nombre minimum d'expériences :

$$N \geq 1 + \sum (s_j - 1)$$

$$N \geq 1 + (4 \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 3)$$

$$\geq 11 \text{ expériences}$$



Construction de la matrice d'expériences :

$$4^5 // 16 \xrightarrow{\text{correspondance } B} 2^3 4^4 // 16 \xrightarrow{B} 2^6 4^3 // 16 \xrightarrow{A} 2^6 3^1 4^2 // 16$$

$$2^4 3^1 4^1 // 16$$



## Matrice 4<sup>5</sup>//16

| N° | A | B | C | D | E |
|----|---|---|---|---|---|
| 1  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2  | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 3  | 2 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 4  | 3 | 0 | 3 | 3 | 3 |
| 5  | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 6  | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 7  | 2 | 1 | 3 | 0 | 1 |
| 8  | 3 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 9  | 0 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| 11 | 2 | 2 | 0 | 1 | 3 |
| 12 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 13 | 0 | 3 | 3 | 1 | 2 |
| 14 | 1 | 3 | 2 | 0 | 3 |
| 15 | 2 | 3 | 1 | 3 | 0 |
| 16 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 |

Correspondance B:  $4^5//16 \rightarrow 2^3 4^4//16$

| $N^\circ$ | $A$ |
|-----------|-----|
| 1         | 0   |
| 2         | 1   |
| 3         | 2   |
| 4         | 3   |
| 5         | 0   |
| 6         | 1   |
| 7         | 2   |
| 8         | 3   |
| 9         | 0   |
| 10        | 1   |
| 11        | 2   |
| 12        | 3   |
| 13        | 0   |
| 14        | 1   |
| 15        | 2   |
| 16        | 3   |

$\xrightarrow{B}$   
 $0 \rightarrow 000$   
 $1 \rightarrow 101$   
 $2 \rightarrow 011$   
 $3 \rightarrow 110$

Correspondance B:  $2^3 4^4 // 16 \rightarrow 2^4 4^3 // 16$

| $N^\circ$ | X1 | X2 | X3 | B |
|-----------|----|----|----|---|
| 1         | 0  | 0  | 0  | 0 |
| 2         | 1  | 0  | 1  | 0 |
| 3         | 0  | 1  | 1  | 0 |
| 4         | 1  | 1  | 0  | 0 |
| 5         | 0  | 0  | 0  | 1 |
| 6         | 1  | 0  | 1  | 1 |
| 7         | 0  | 1  | 1  | 1 |
| 8         | 1  | 1  | 0  | 1 |
| 9         | 0  | 0  | 0  | 2 |
| 10        | 1  | 0  | 1  | 2 |
| 11        | 0  | 1  | 1  | 2 |
| 12        | 1  | 1  | 0  | 2 |
| 13        | 0  | 0  | 0  | 3 |
| 14        | 1  | 0  | 1  | 3 |
| 15        | 0  | 1  | 1  | 3 |
| 16        | 1  | 1  | 0  | 3 |

$\xrightarrow{B}$

$0 \rightarrow 000$   
 $1 \rightarrow 101$   
 $2 \rightarrow 011$   
 $3 \rightarrow 110$

Correspondance A :  $2^4 4^3 // 16 \rightarrow 2^4 3^1 4^2 // 16$

| N° | X1 | X2 | X3 | X4 | C |
|----|----|----|----|----|---|
| 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 |
| 2  | 1  | 0  | 1  | 0  | 1 |
| 3  | 0  | 1  | 1  | 0  | 2 |
| 4  | 1  | 1  | 0  | 0  | 3 |
| 5  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1 |
| 6  | 1  | 0  | 1  | 1  | 0 |
| 7  | 0  | 1  | 1  | 1  | 3 |
| 8  | 1  | 1  | 0  | 1  | 2 |
| 9  | 0  | 0  | 0  | 0  | 2 |
| 10 | 1  | 0  | 1  | 0  | 3 |
| 11 | 0  | 1  | 1  | 0  | 0 |
| 12 | 1  | 1  | 0  | 0  | 1 |
| 13 | 0  | 0  | 0  | 1  | 3 |
| 14 | 1  | 0  | 1  | 1  | 2 |
| 15 | 0  | 1  | 1  | 1  | 1 |
| 16 | 1  | 1  | 0  | 1  | 0 |

$\xrightarrow{A}$

$0 \rightarrow 0$   
 $1 \rightarrow 1$   
 $2 \rightarrow 2$   
 $3 \rightarrow 0$

## Matrice d'expériences $2^4 3^1 4^1 // 16$

| N° | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 2  | 1  | 0  | 1  | 0  | 1  | 1  |
| 3  | 0  | 1  | 1  | 0  | 2  | 2  |
| 4  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 3  |
| 5  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 2  |
| 6  | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 3  |
| 7  | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  |
| 8  | 1  | 1  | 0  | 1  | 2  | 1  |
| 9  | 0  | 0  | 0  | 0  | 2  | 3  |
| 10 | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 2  |
| 11 | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1  |
| 12 | 1  | 1  | 0  | 0  | 1  | 0  |
| 13 | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  |
| 14 | 1  | 0  | 1  | 1  | 2  | 0  |
| 15 | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 3  |
| 16 | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 2  |

## ➡ Construire le plan d'expérimentation

Vérifier si la stratégie respecte les objectifs et les contraintes

### Plan d'expérimentation

| N°Exp | Tête forage | Taille   | Vitesse forage | Matériel | Usine   | Opérateur |
|-------|-------------|----------|----------------|----------|---------|-----------|
| 1     | neuf        | 0.125 mm | 400 tr/mn      | mou      | Chicago | A         |
| 2     | recupéré    | 0.125 mm | 800 tr/mn      | mou      | Kansas  | B         |
| 3     | neuf        | 0.25 mm  | 800 tr/mn      | mou      | Miami   | C         |
| 4     | recupéré    | 0.25 mm  | 400 tr/mn      | mou      | Chicago | D         |
| 5     | neuf        | 0.125 mm | 400 tr/mn      | dur      | Kansas  | C         |
| 6     | recupéré    | 0.125 mm | 800 tr/mn      | dur      | Chicago | D         |
| 7     | neuf        | 0.25 mm  | 800 tr/mn      | dur      | Chicago | A         |
| 8     | recupéré    | 0.25 mm  | 400 tr/mn      | dur      | Miami   | B         |
| 9     | neuf        | 0.125 mm | 400 tr/mn      | mou      | Miami   | D         |
| 10    | recupéré    | 0.125 mm | 800 tr/mn      | mou      | Chicago | C         |
| 11    | neuf        | 0.25 mm  | 800 tr/mn      | mou      | Chicago | B         |
| 12    | recupéré    | 0.25 mm  | 400 tr/mn      | mou      | Kansas  | A         |
| 13    | neuf        | 0.125 mm | 400 tr/mn      | dur      | Chicago | B         |
| 14    | recupéré    | 0.125 mm | 800 tr/mn      | dur      | Miami   | A         |
| 15    | neuf        | 0.25 mm  | 800 tr/mn      | dur      | Kansas  | D         |
| 16    | recupéré    | 0.25 mm  | 400 tr/mn      | dur      | Chicago | C         |

## ➡ Faire les expériences

### Plan d'expérimentation + réponse expérimentale

| N°Exp | Tête forage | Taille   | Vitesse forage | Matériel | Usine   | Opérateur | Durée vie |
|-------|-------------|----------|----------------|----------|---------|-----------|-----------|
| 1     | neuf        | 0.125 mm | 400 tr/mn      | mou      | Chicago | A         | 17.2      |
| 2     | recupéré    | 0.125 mm | 800 tr/mn      | mou      | Kansas  | B         | 15.2      |
| 3     | neuf        | 0.25 mm  | 800 tr/mn      | mou      | Miami   | C         | 16.1      |
| 4     | recupéré    | 0.25 mm  | 400 tr/mn      | mou      | Chicago | D         | 15        |
| 5     | neuf        | 0.125 mm | 400 tr/mn      | dur      | Kansas  | C         | 14.1      |
| 6     | recupéré    | 0.125 mm | 800 tr/mn      | dur      | Chicago | D         | 11.5      |
| 7     | neuf        | 0.25 mm  | 800 tr/mn      | dur      | Chicago | A         | 14.9      |
| 8     | recupéré    | 0.25 mm  | 400 tr/mn      | dur      | Miami   | B         | 10        |
| 9     | neuf        | 0.125 mm | 400 tr/mn      | mou      | Miami   | D         | 12.1      |
| 10    | recupéré    | 0.125 mm | 800 tr/mn      | mou      | Chicago | C         | 12.6      |
| 11    | neuf        | 0.25 mm  | 800 tr/mn      | mou      | Chicago | B         | 15.8      |
| 12    | recupéré    | 0.25 mm  | 400 tr/mn      | mou      | Kansas  | A         | 12.1      |
| 13    | neuf        | 0.125 mm | 400 tr/mn      | dur      | Chicago | B         | 17.1      |
| 14    | recupéré    | 0.125 mm | 800 tr/mn      | dur      | Miami   | A         | 12        |
| 15    | neuf        | 0.25 mm  | 800 tr/mn      | dur      | Kansas  | D         | 17.7      |
| 16    | recupéré    | 0.25 mm  | 400 tr/mn      | dur      | Chicago | C         | 14.2      |

**Estimations des effets par rapport  
au niveau supérieur pris comme référence :**

$$Y = b_0 + b_{1A} X_{1A} + b_{2A} X_{2A} + b_{3A} X_{3A} + b_{4A} X_{4A} + b_{5A} X_{5A} + b_{5B} X_{5B} + b_{6A} X_{6A} + b_{6B} X_{6B} + b_{6C} X_{6C}$$

|                 |   |         |                 |   |         |
|-----------------|---|---------|-----------------|---|---------|
| Cste            | = | 11.2121 | b <sub>5A</sub> | = | 2.2375  |
| b <sub>1A</sub> | = | 2.8000  | b <sub>5B</sub> | = | 2.2250  |
| b <sub>2A</sub> | = | -0.5000 | b <sub>6A</sub> | = | -0.0250 |
| b <sub>3A</sub> | = | -0.5000 | b <sub>6B</sub> | = | 0.4500  |
| b <sub>4A</sub> | = | 0.5750  | b <sub>6C</sub> | = | 0.1750  |

### Coefficients – Durée de vie

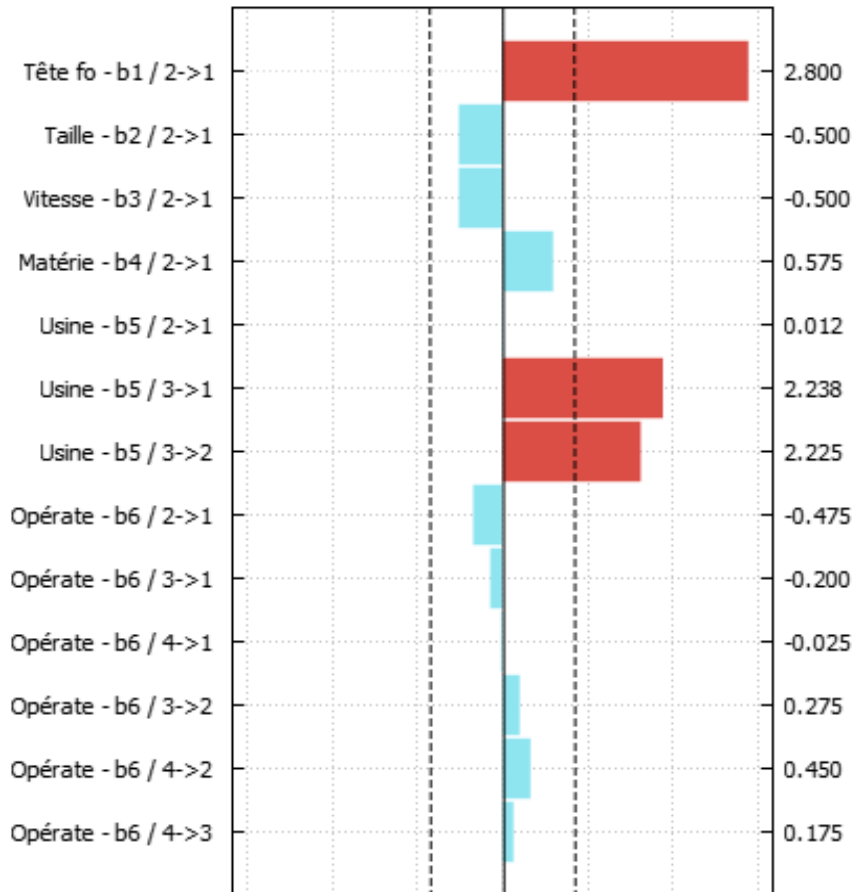
| Coefficients |         |
|--------------|---------|
| b0           |         |
| b1A          | 2.8000  |
| b2A          | -0.5000 |
| b3A          | -0.5000 |
| b4A          | 0.5750  |
| b5A          | 2.2375  |
| b5B          | 2.2250  |
| b6A          | -0.0250 |
| b6B          | 0.4500  |
| b6C          | 0.1750  |

### Effets – Durée de vie

| Effets    |         |
|-----------|---------|
|           |         |
| b1 / 2->1 | 2.8000  |
| b2 / 2->1 | -0.5000 |
| b3 / 2->1 | -0.5000 |
| b4 / 2->1 | 0.5750  |
| b5 / 2->1 | 0.0125  |
| b5 / 3->1 | 2.2375  |
| b5 / 3->2 | 2.2250  |
| b6 / 2->1 | -0.4750 |
| b6 / 3->1 | -0.2000 |
| b6 / 4->1 | -0.0250 |
| b6 / 3->2 | 0.2750  |
| b6 / 4->2 | 0.4500  |
| b6 / 4->3 | 0.1750  |

## Etude graphique des effets de la réponse $Y_1$

### Différences des poids des différents niveaux



### Etude graphique des effets totaux

