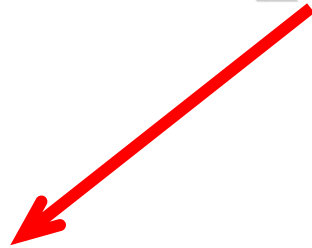


Elaborer une stratégie expérimentale



choisir, pour chaque problématique, le meilleur
plan d'expériences

Les objectifs



Criblage de
facteurs



Connaître le "poids"
des facteurs

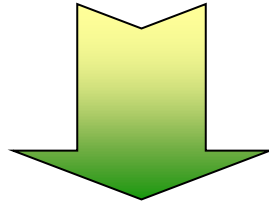


Etude quantitative de
facteurs

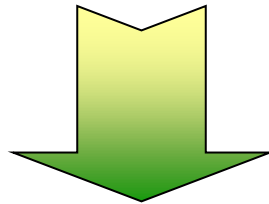


Connaître les effets
des facteurs et
leurs interactions

Etude Quantitative de facteurs

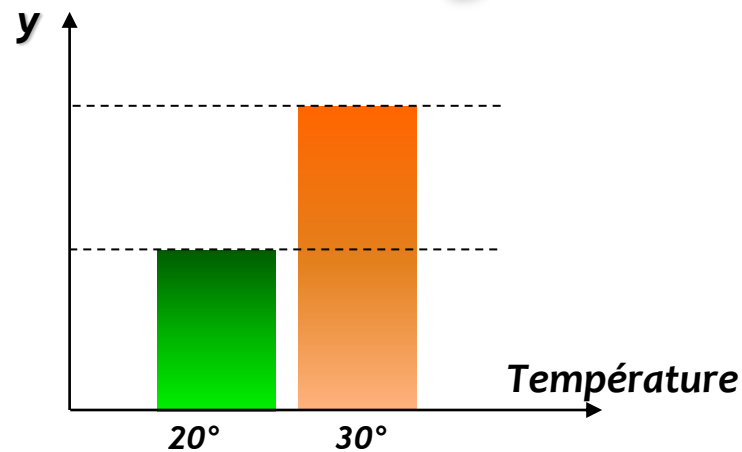


***On tient compte d'éventuels effets d'interaction
entre les facteurs***

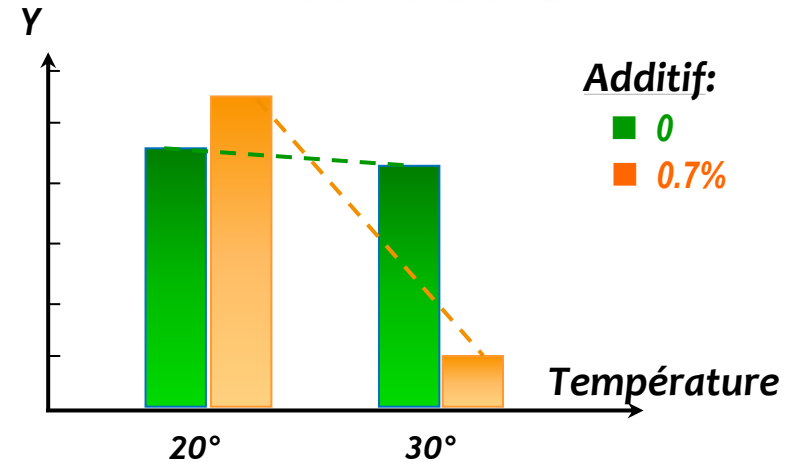


***L'effet d'un facteur peut être différent selon la
valeur d'un autre facteur***

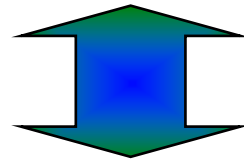
Screening



Interaction



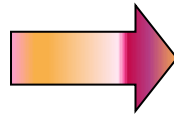
Les effets des facteurs X_i et X_j sont dits **indépendants** si
l'effet du facteur X_i **ne dépend pas** de la valeur du
facteur X_j



Les effets des facteurs X_i et X_j sont dits **dépendants** si
l'effet du facteur X_i **dépend** de la valeur du facteur X_j

Matrices factorielles : 2^k

$k = 2$



$2^2 = 4$ expériences

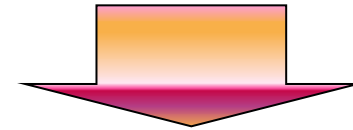
Matrice d'expériences
factorielle : 2^2

N	X_1	X_2
1	-	-
2	+	-
3	-	+
4	+	+

Matrice d'expériences factorielle : 2^3

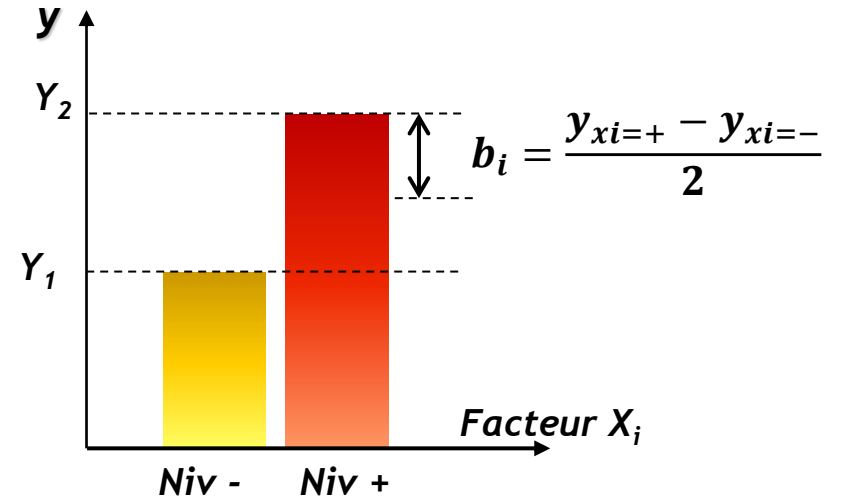
N	X_1	X_2	X_3
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

$k = 3$



$2^3 = 8$ expériences

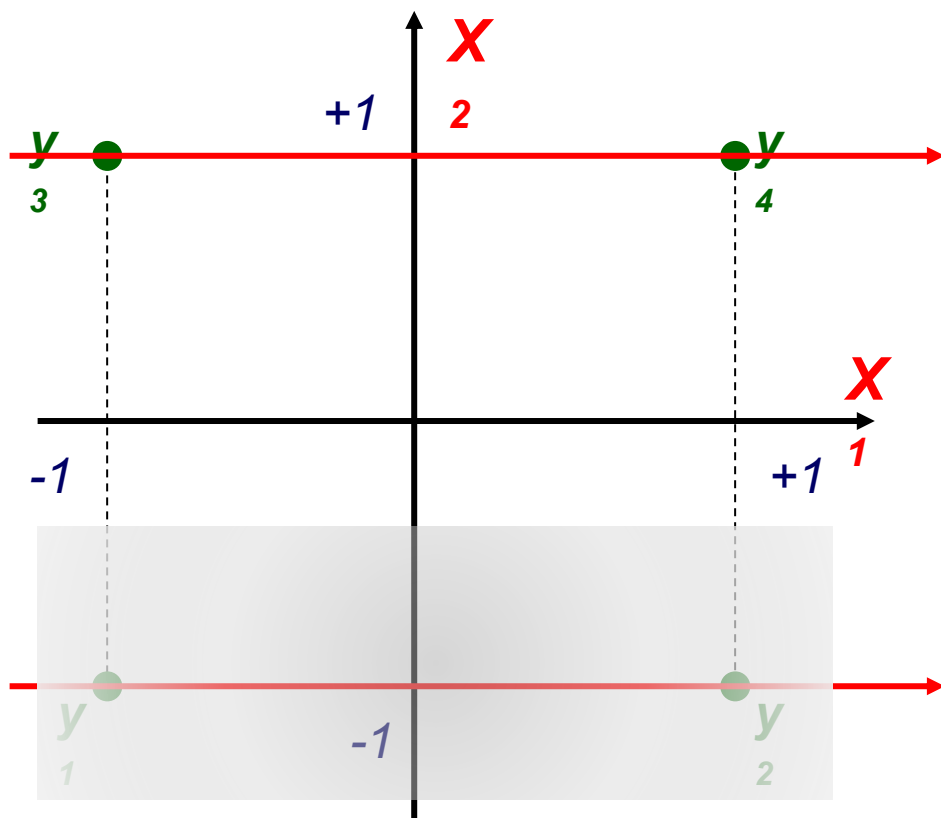
N°	X_0	X_1	X_2	Y
1	1	-1	-1	y_1
2	1	1	-1	y_2
3	1	-1	1	y_3
4	1	1	1	y_4



$$b_1 = \frac{\left[\frac{y_2 + y_4}{2} \right] - \left[\frac{y_1 + y_3}{2} \right]}{2} = \frac{[-y_1 + y_2 - y_3 + y_4]}{4}$$

$$b_2 = \frac{\left[\frac{y_3 + y_4}{2} \right] - \left[\frac{y_1 + y_2}{2} \right]}{2} = \frac{[-y_1 - y_2 + y_3 + y_4]}{4}$$

$$b_0 = \frac{[+y_1 + y_2 + y_3 + y_4]}{4}$$



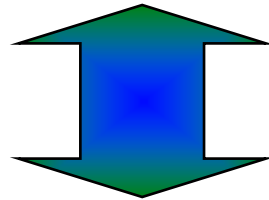
$$X_2 = +1$$

$$b_1^+ = (y_4 - y_3) / 2$$

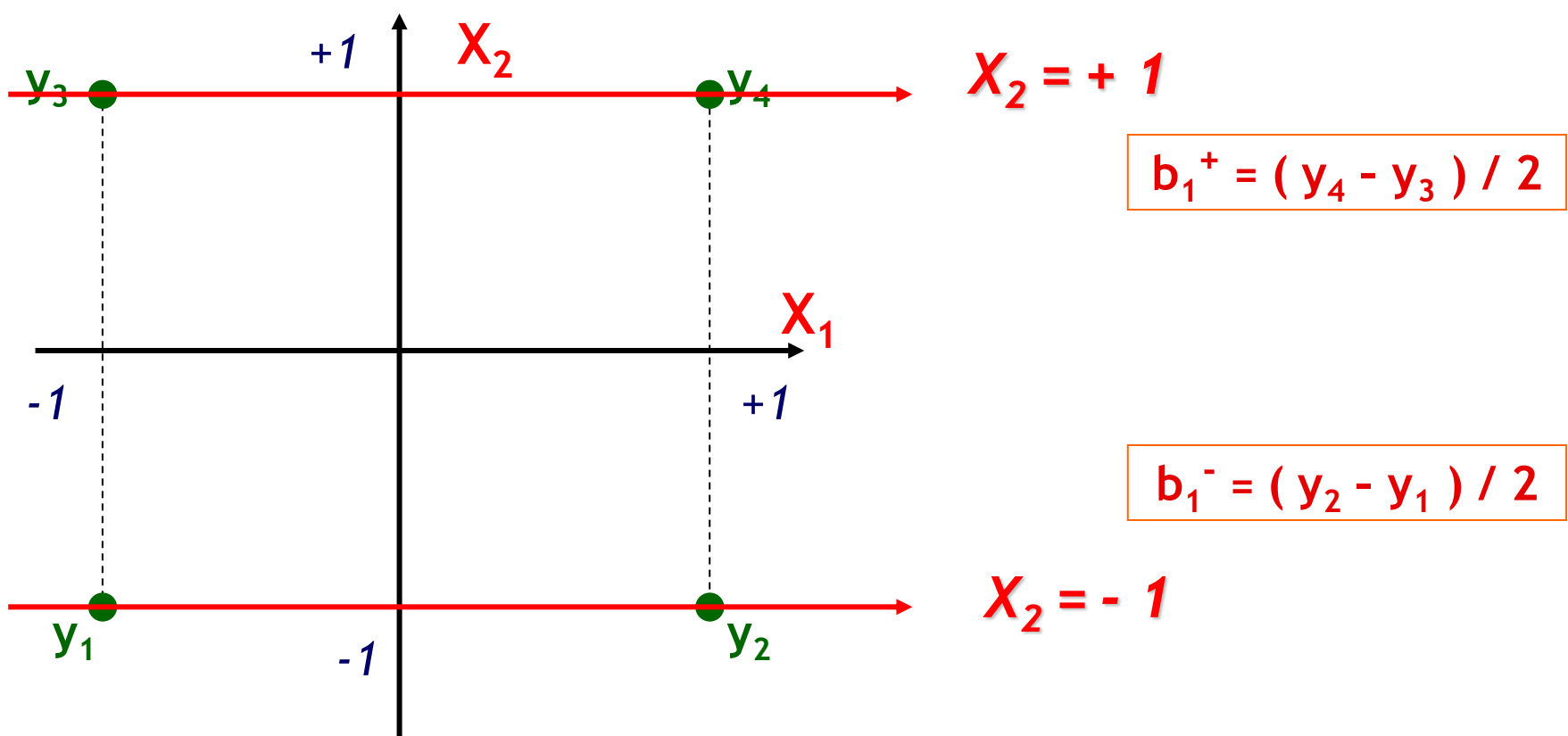
$$b_1^- = (y_2 - y_1) / 2$$

$$X_2 = -1$$

Les effets des facteurs X_i et X_j sont dits indépendants si l'effet du facteur X_i ne dépend pas de la valeur prise par le facteur X_j



Les effets des facteurs X_i et X_j sont dits dépendants si l'effet du facteur X_i dépend de la valeur prise par le facteur X_j



Si les effets de X_1 et X_2 sont indépendants

Alors

$$b_1^+ \cong b_1^- \Rightarrow b_1^+ - b_1^- \cong 0$$

$$b_1^+ - b_1^- = \left[\frac{y_4 - y_3}{2} \right] - \left[\frac{y_2 - y_1}{2} \right]$$

Sinon

$$b_1^+ \neq b_1^- \Rightarrow b_1^+ - b_1^- \neq 0$$

$$b_1^+ - b_1^- = \left[\frac{y_4 - y_3 - y_2 + y_1}{2} \right]$$

Matrice des effets :

N°	X ₀	X ₁	X ₂	X ₁ X ₂	Y
1	1	-1	-1	1	y ₁
2	1	1	-1	-1	y ₂
3	1	-1	1	-1	y ₃
4	1	1	1	1	y ₄

$$b_0 = \frac{[+y_1 + y_2 + y_3 + y_4]}{4}$$

$$b_1 = \frac{[-y_1 + y_2 - y_3 + y_4]}{4}$$

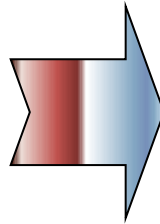
$$b_2 = \frac{[-y_1 - y_2 + y_3 + y_4]}{4}$$

$$b_{12} = \frac{[+y_4 - y_3 - y_2 + y_1]}{4}$$

b₁₂ : effet d'interaction

Matrice d'expériences 2²

N	X ₁	X ₂
1	-	-
2	+	-
3	-	+
4	+	+



Plan d'expérimentation

N	U ₁	U ₂	Rdt %
1	40 °C	1 h	23
2	60 °C	1 h	37
3	40 °C	2 h	41
4	60 °C	2 h	59

Réponse expérimentale

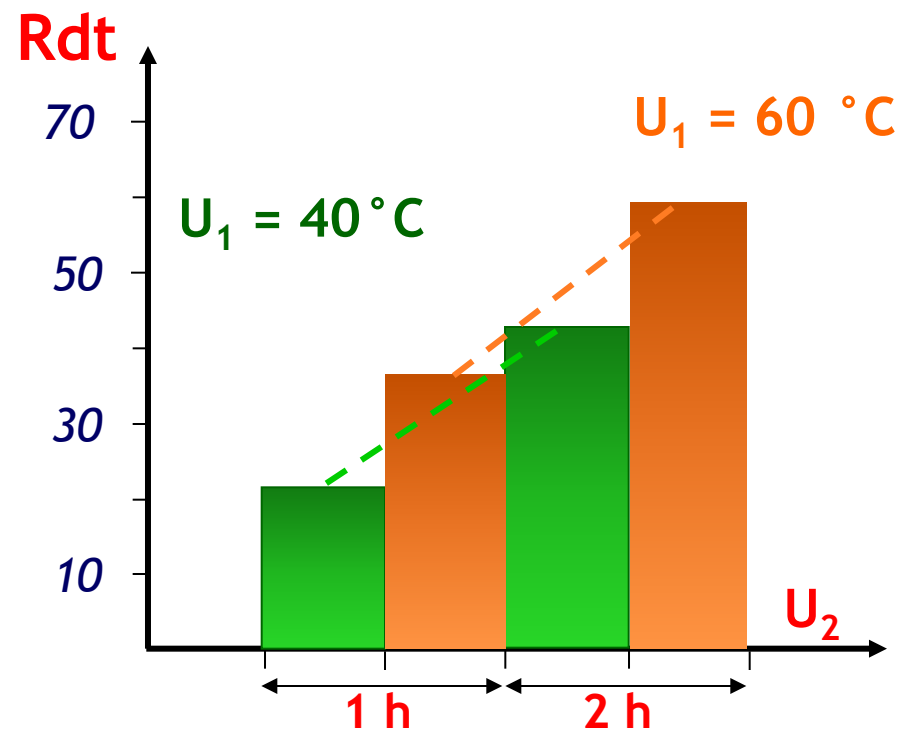
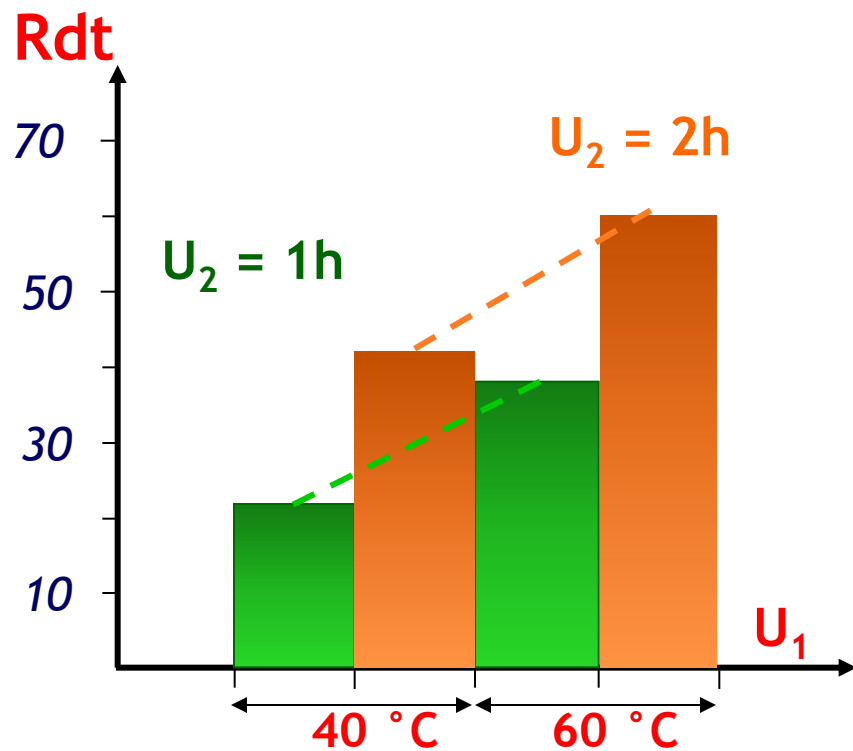
$$b_0 = (+y_1 + y_2 + y_3 + y_4) / 4 = 40$$

$$b_2 = (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) / 4 = 10$$

$$b_1 = (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4) / 4 = 8$$

$$b_{12} = (+y_1 - y_2 - y_3 + y_4) / 4 = 1$$

N°	U_1	U_2	Rdt
1	40	1	23
2	60	1	37
3	40	2	41
4	60	2	59



Plan d'expérimentation

N	U_1	U_2	Rdt %
1	40 °C	1 h	17
2	60 °C	1 h	43
3	40 °C	2 h	65
4	60 °C	2 h	35

Réponse expérimentale

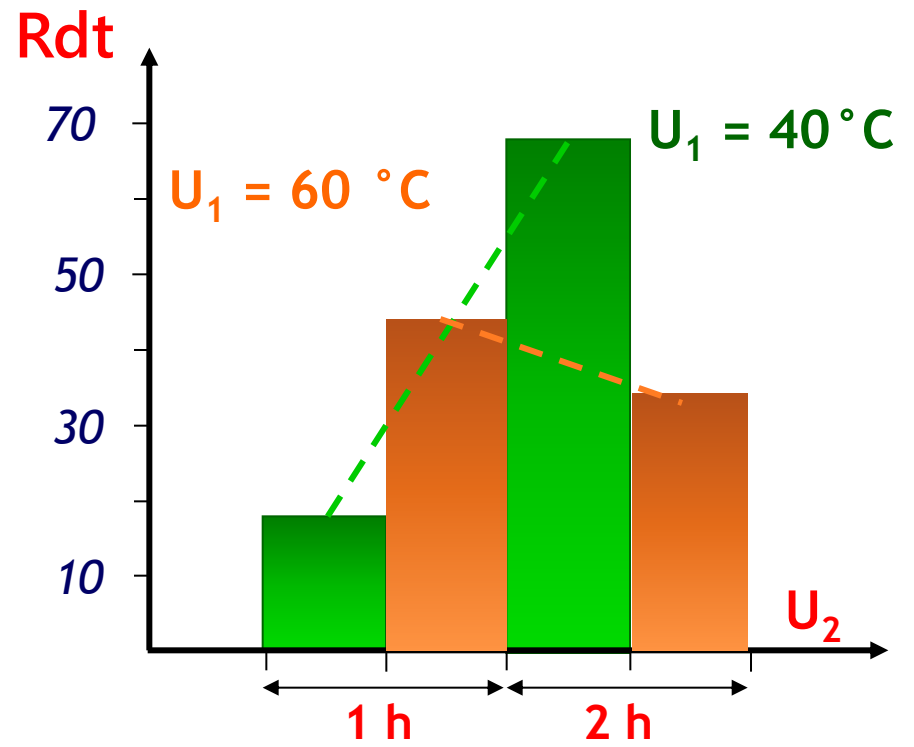
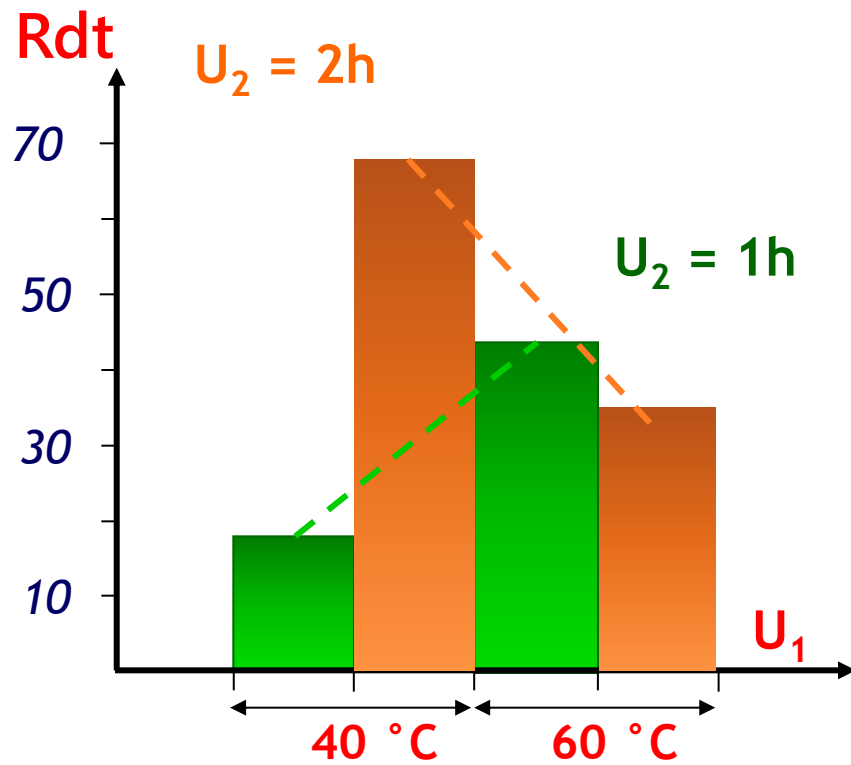
$$b_0 = (+y_1 + y_2 + y_3 + y_4) / 4 = 40$$

$$b_2 = (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) / 4 = 10$$

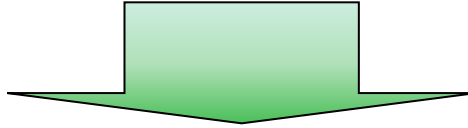
$$b_1 = (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4) / 4 = -1$$

$$b_{12} = (+y_1 - y_2 - y_3 + y_4) / 4 = -14$$

N°	U_1	U_2	Rdt
1	40	1	17
2	60	1	43
3	40	2	65
4	60	2	35



Matrice d'expériences 2^3

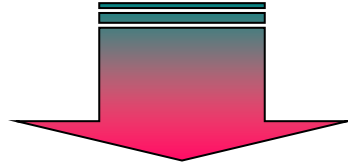


8 combinaisons linéaires indépendantes

8 Effets :

- b_0 ,
- b_1, b_2, b_3 ,
- b_{12}, b_{13}, b_{23} ,
- b_{123}

Matrices factorielles 2^k



Effets principaux et effets d'interaction

- b_i effet principal
- b_{ij} effet d'interaction du premier ordre
- b_{ijm} effet d'interaction du deuxième ordre
- • b_{ijmt} effet d'interaction du troisième ordre

Modélisation d'une unité de production

Un programme de simulation d'une unité de raffinerie (sécheur sous vide de gazole) permet d'étudier la quantité d'eau résiduelle dans le produit.

Domaine expérimental

	FACTEURS	Niveau (-)	Niveau (+)
U_1	Pression (bars)	0,06	0,12
U_2	Température de traitement	70 °C	100 °C
U_3	Qté d'eau dans la charge	0,75 %	2,25 %

Réponse expérimentale étudiée :

η : Quantité d'eau résiduelle dans le produit (ppm)

OBJECTIF

Connaître les effets principaux et les effets d'interaction

ETUDE DES FACTEURS

→ *Construire la matrice d'expériences*

Plan d'expériences optimal : 2^3

$2^3 = 8$ expériences



8 combinaisons
linéaires indépendantes

8 Effets :

- b_0 ,
- Effets des 3 facteurs:
 b_1, b_2, b_3 ,
- Effets d'Interaction :
 $b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{123}$



N	X_1	X_2	X_3
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

OBJECTIF

Connaître les effets principaux et les effets d'interaction

ETUDE DES FACTEURS

- *Construire la matrice d'expériences*
- *Construire le plan d'expérimentation*

Matrice d'expériences

N	X ₁	X ₂	X ₃
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

Plan d'expérimentation

N	U ₁ bars	U ₂ °C	U ₃ %
1	0,06	70	0,75
2	0,12	70	0,75
3	0,06	100	0,75
4	0,12	100	0,75
5	0,06	70	2,25
6	0,12	70	2,25
7	0,06	100	2,25
8	0,12	100	2,25

OBJECTIF

Connaître les effets principaux et les effets d'interaction

ETUDE DES FACTEURS



→ Construire la matrice d'expériences

→ Construire le plan d'expérimentation

Vérifier si la stratégie respecte les objectifs et les contraintes

→ Randomisation

→ Faire les expériences

Plan d'expérimentation et réponse expérimentale

<i>N</i>	<i>U</i> ₁ (bars)	<i>U</i> ₂ (°C)	<i>U</i> ₃ (%)	<i>Y</i> (%)
<i>1</i>	0.06	70	0.75	22.8
<i>1'</i>	0.06	70	0.75	20.9
<i>2</i>	0.12	70	0.75	51.7
<i>2'</i>	0.12	70	0.75	50.0
<i>3</i>	0.06	100	0.75	9.9
<i>3'</i>	0.06	100	0.75	11.8
<i>4</i>	0.12	100	0.75	9.2
<i>4'</i>	0.12	100	0.75	11
<i>5</i>	0.06	70	2.25	24.1
<i>5'</i>	0.06	70	2.25	25.8
<i>6</i>	0.12	70	2.25	53.5
<i>6'</i>	0.12	70	2.25	51.5
<i>7</i>	0.06	100	2.25	13.4
<i>7'</i>	0.06	100	2.25	11.8
<i>8</i>	0.12	100	2.25	15.7
<i>8'</i>	0.12	100	2.25	13.6

OBJECTIF

Connaître les effets principaux et les effets d'interaction

ETUDE DES FACTEURS

- Construire la matrice d'expériences
- Construire le plan d'expérimentation
 - Vérifier si la stratégie respecte les objectifs et les contraintes*
- Randomisation
- Faire les expériences
- Calculer les estimations des coefficients

Matrice d'expériences + Y

N	X ₁	X ₂	X ₃	Y
1	-	-	-	21,85
2	+	-	-	50,85
3	-	+	-	10,85
4	+	+	-	10,10
5	-	-	+	24,95
6	+	-	+	52,50
7	-	+	+	12,60
8	+	+	+	14,65

Estimation des combinaisons linéaires indépendantes :

<u>effets des facteurs</u>	b_0	=	24,79	
	b_1	=	7,23	► Pression
	b_2	=	-12,74	► Température
	b_3	=	1,38	► Qté eau
<u>effets d'interaction</u>	b_{12}	=	-6,91	► P/T°
	b_{13}	=	0,17	► P/Eau
	b_{23}	=	0,19	► T°/Eau
	b_{123}	=	0,53	► P/T°C/Eau

OBJECTIF

Connaître les effets principaux et les effets d'interaction

ETUDE DES FACTEURS

- Construire la matrice d'expériences
- Construire le plan d'expérimentation
 - Vérifier si la stratégie respecte les objectifs et les contraintes*
- Randomisation
- Faire les expériences
- Calculer les estimations des coefficients
- **Interprétation**

Plan d'expérimentation et réponse expérimentale

<i>N</i>	<i>U</i> ₁ (bars)	<i>U</i> ₂ (°C)	<i>U</i> ₃ (%)	<i>Y</i> (%)
<i>1</i>	0.06	70	0.75	22.8
<i>1'</i>	0.06	70	0.75	20.9
<i>2</i>	0.12	70	0.75	51.7
<i>2'</i>	0.12	70	0.75	50.0
<i>3</i>	0.06	100	0.75	9.9
<i>3'</i>	0.06	100	0.75	11.8
<i>4</i>	0.12	100	0.75	9.2
<i>4'</i>	0.12	100	0.75	11
<i>5</i>	0.06	70	2.25	24.1
<i>5'</i>	0.06	70	2.25	25.8
<i>6</i>	0.12	70	2.25	53.5
<i>6'</i>	0.12	70	2.25	51.5
<i>7</i>	0.06	100	2.25	13.4
<i>7'</i>	0.06	100	2.25	11.8
<i>8</i>	0.12	100	2.25	15.7
<i>8'</i>	0.12	100	2.25	13.6

Limites de signification

avec σ^2 connu, à partir de points répétés

$$\text{Limites} = \pm t_{\alpha,d} \times \text{Ecart-type (coeff.)}$$

α = *seuil de signification*

d = *degrés de liberté*

Matrices factorielles : ➡ $\text{var (coeff)} = \sigma^2/N$

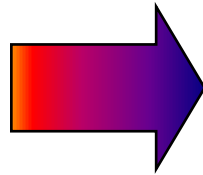
➡ $\text{Ecart-type (coeff)} = \sqrt{\sigma^2/N}$

$$\text{Limites} = \pm t_{\alpha,d} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}$$

Statistiques à partir des points répétés

A l'expérience i :

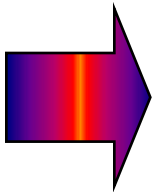
Moyenne : $y_{\text{moy},i} = (y_i + y'_i) / 2$



$$y_{\text{moy},1} = (22,8 + 20,9) / 2 = 21,85$$

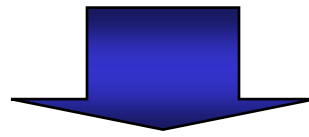
Variance :

$$\sigma^2_i = [(y_i - y_{\text{moy},i})^2 + (y'_i - y_{\text{moy},i})^2] / (2 - 1)$$



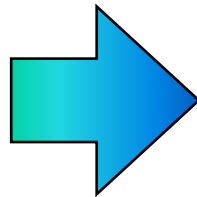
$$\sigma^2_1 = [(22,8 - 21,85)^2 + (20,9 - 21,85)^2] / (2 - 1)$$

$$\sigma^2_1 = 1,805$$



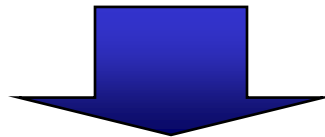
Pour la matrice d'expériences :

$$\sigma^2 = \sum_i (\sigma^2_i) / 8$$

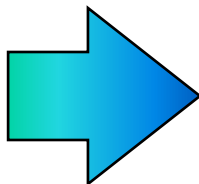


$$\sigma^2 = 1,70 \quad \text{avec, } 8 \times 1 = 8 \text{ degrés de liberté}$$

$$\text{Var (coeff.)} = \sigma^2 / N$$



$$\text{var (coeff)} = 1,7 / 16 = 0,106$$



$$\text{Ecart-type (coeff.)} = 0,326$$

TEST DE STUDENT



α bilatéral



v (degré de liberté)

	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.706	31.821	63.656	127.32	636.58
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.92	4.3027	6.9645	9.925	14.089	31.6
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408	7.4532	12.924
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.941	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041	5.5975	8.6101
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.015	2.5706	3.3649	4.0321	4.7733	6.8685
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	4.3168	5.9587
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.896	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995	4.0294	5.4081
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.306	2.8965	3.3554	3.8325	5.0414
9	0.1293	0.261	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.383	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6896	4.7809
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.5868
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.201	2.7181	3.1058	3.4966	4.4369
12														

$$\text{Limites} = \pm t_{\alpha,d} \times \text{Ecart-type}(b_j)$$

$$\cdot \text{Ecart-type}(b_j) = 0,326$$

$$\cdot t_{0.95,8} = 2,31$$

$$\text{Limites} = \pm 2,31 \times 0,326$$

$$\text{Limites} = \pm 0,752$$

Etude graphique des effets

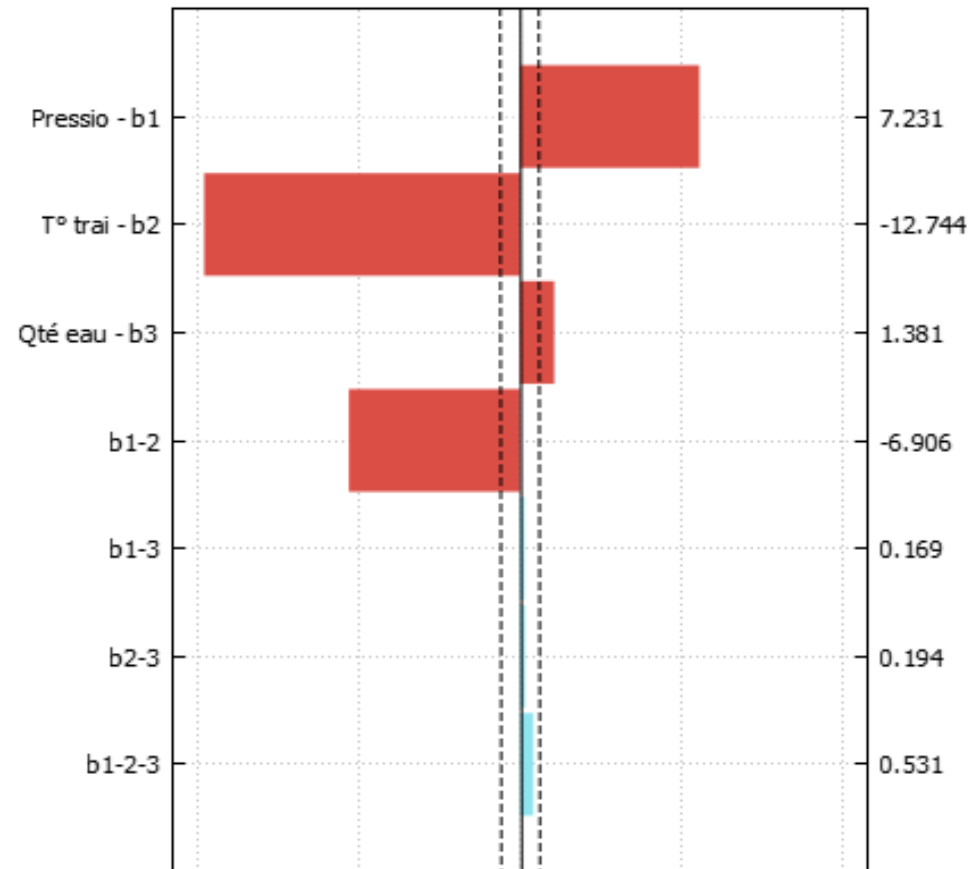


Diagramme d'interaction

Pression/Température

<i>N</i>	<i>X</i> ₁	<i>X</i> ₂	<i>X</i> ₃	<i>Y</i>
1	-	-	-	21,85
2	+	-	-	50,85
3	-	+	-	10,85
4	+	+	-	10,10
5	-	-	+	24,95
6	+	-	+	52,50
7	-	+	+	12,60
8	+	+	+	14,65

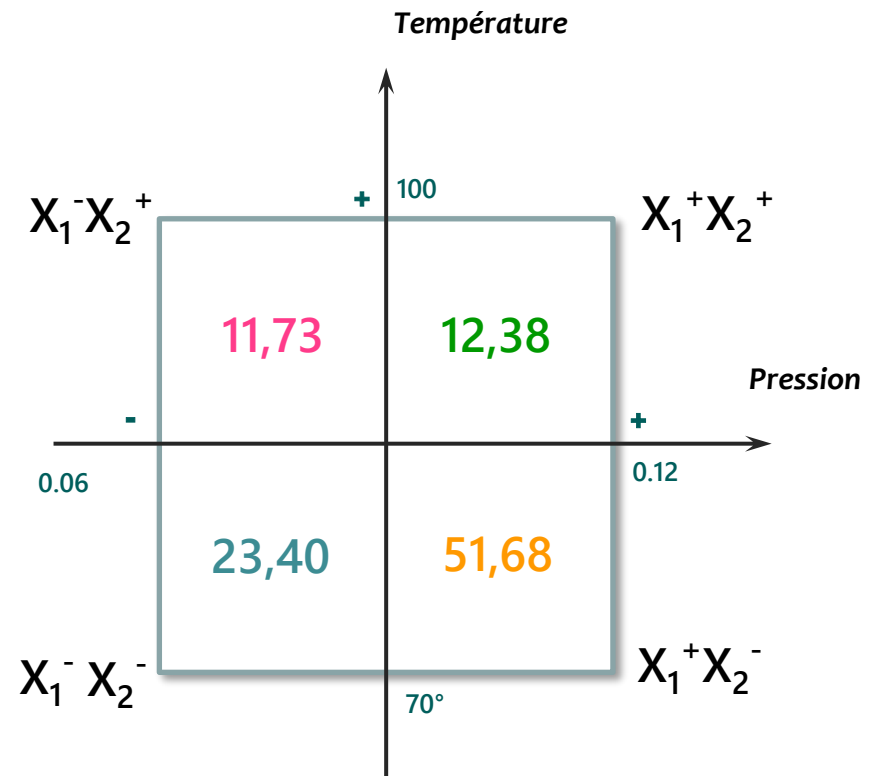
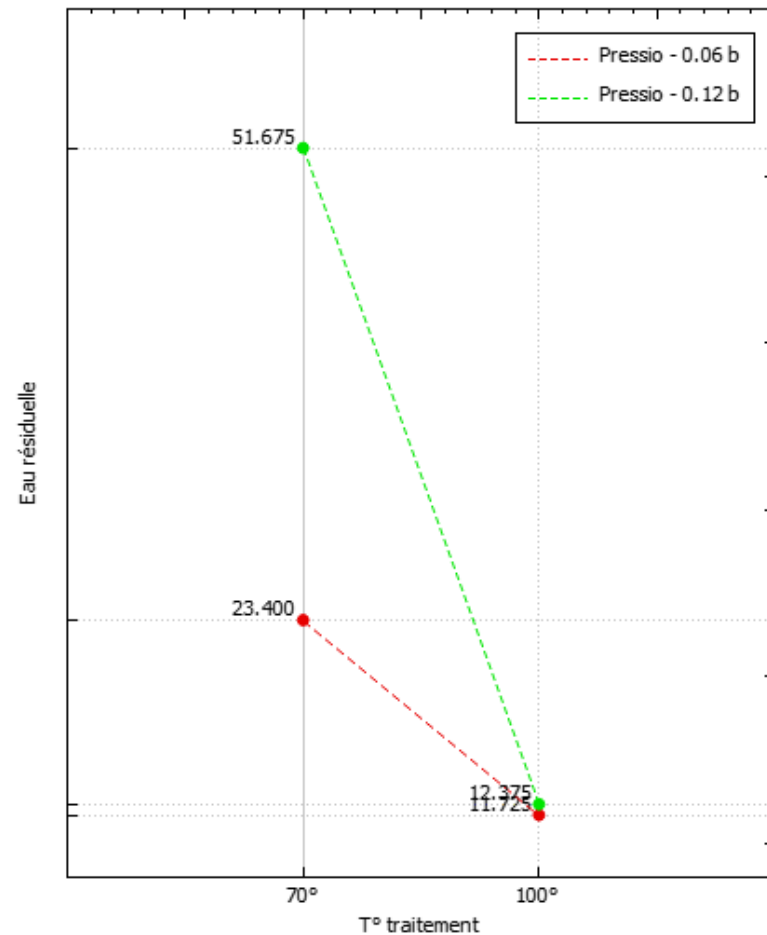
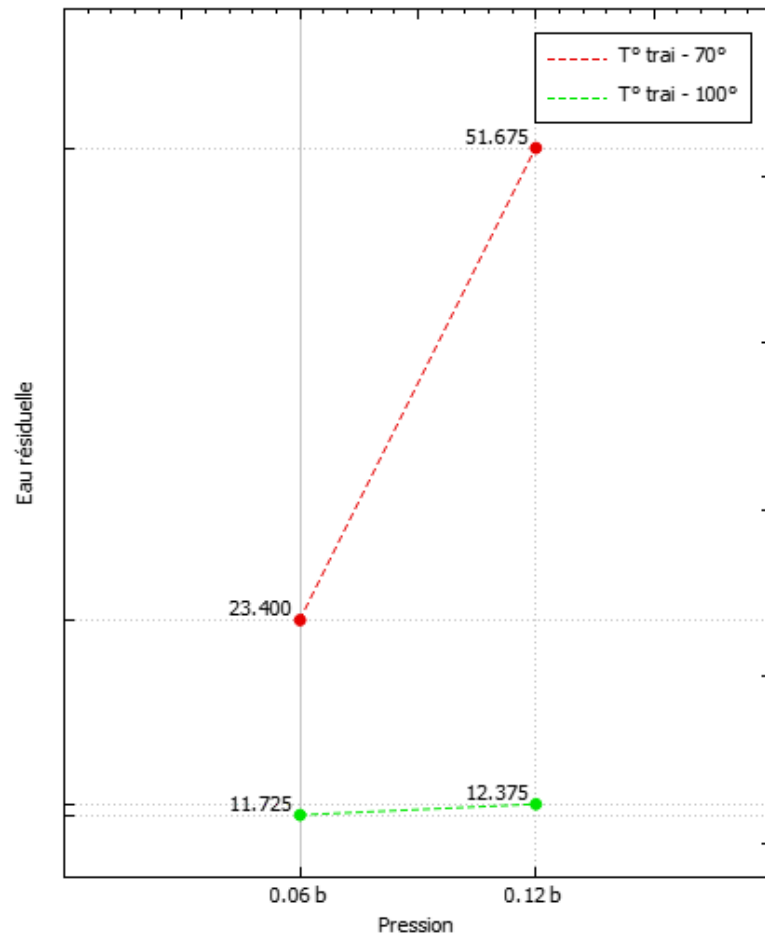


Diagramme d'interaction

Pression/Température



Etude statistique des coefficients

Effet	Valeur	Ecart-type	$t_{\text{exp.}}$	Signif. (%)
b_0	216,75	1,47		
b_1	20,88	1,47	14,22	< 0,01 ***
b_2	-16,38	1,47	- 11,15	< 0,01 ***
b_3	-8,38	1,47	- 5,70	< 0,04 ***
b_{12}	2,00	1,47	1,36	21,0
b_{13}	2,75	1,47	1,87	9,8
b_{23}	10,75	1,47	7,32	< 0,01 ***
b_{123}	-0,88	1,47	-0,60	56,8